د. كساب علي
أستاذ محاضر
كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير — جامعة الجزائر

# النظرية الاقتصادية
# التحليل الجزئي

الطبعة الثالثة



ديوان المطبوعات الجامعية
الساحة المركزية . بن عكنون . الجزائر

رقم النشر : 4.01.4173
رقم ر.د.م.ك ( ISBN ): 9961.0.0655.0
رقم الإيداع القانوني : 2003/1804

# المقدمة

تظهر المشكلة الإقتصادية في أي مجتمع من مجتمعات البشرية عند ممارسة العمليات الخاصة باستخدام الموارد المتاحة بهدف إشباع الحاجات البشرية وهذا ما يعرف بالنشاط الإقتصادي.

إن الحاجات البشرية متزايدة مع التطور الحضاري ويمكن إشباعها عن طريق استهلاك السلع وهي نوعان بضائع وخدمات تنتج من الموارد المتاحة أو بواسطتها وتتمثل الموارد المتاحة في الموارد الطبيعية كالأرض والثروات المعدنية، والموارد المصنعة وهي التي أنتجها الإنسان لمساعدته في الإنتاج كالمعدات والآلات والموارد البشرية التي تتمثل في العنصر البشري كما ونوعا.

ونطرح هنا سؤالا: فيما تتمثل المشكلة الإقتصادية؟

للإجابة عن هذا السؤال نقرأ في سورة إبراهيم الآيات 32، 33، 34 قول الله تعالي: " الله الذي خلق السماوات والأرض وأنزل من السماء ماء فأخرج به من الثمرات رزقا لكم وسخر لكم الفلك لتجري في البحر بأمره، وسخر لكم الأنهار، وسخر لكم الشمس والقمر دائبين، وسخر لكم الليل والنهار، وءاتاكم من كل ما سألتموه وإن تعدوا نعمة الله لا تحصوها، إن الإنسان لظلوم كفار".

تبين هذه الآيات الكريمة أن الله قد حشد للإنسان في هذا الكون الفسيح كل مصالحه ومنافعه ووفر له الموارد الكافية لإمداده بحياته وحاجاته المادية، ولكن الإنسان هو الذي ضيع على نفسه هذه الفرصة التي منحها الله له بظلمه وكفرانه ( أن الإنسان لظلوم كفار ).

إذن ظلم الإنسان في حياته العملية وكفرانه بالنعمة الإلهية هما السببان الأساسيان للمشكلة الإقتصادية في حياة الإنسان. ويتجسد الظلم على الصعيد الإقتصادي في:

1 ـ الظلم في سوء التوزيع ما قبل الإنتاج وما بعد الإنتاج. ويتمثل سوء التوزيع ما قبل الإنتاج في أشكال الملكية وعملية التخصيص. أما سوء التوزيع ما بعد الإنتاج فيتمثل في ما يعود على عناصر الإنتاج.

2 ـ الكفران بالنعمة الإلهية في إهماله لاستثمار الطبيعة وموقفه السلبي منها ( عدم الإستغلال الأمثل للموارد المتاحة التي وضعها الله عز وجل في الكون ) وعدم تنميتها.

وبالتالي حين يمحى الظلم من العلاقات الإجتماعية للتوزيع، وتجند طاقات الإنسان للإستفادة من الطبيعة واستثمارها تزول المشكلة الإقتصادية. إذن ليس المشكلة في تأمين وإيجاد الموارد وإنما المشكل في التوزيع وتوازنه وعدالته وتنمية الموارد ويتناول موضوع التوزيع وموضوع التنمية. ويعرف الإقتصاد لغويا على أنه "الإعتدال في السلوك ليكون وسطا لا إفراط فيه ولا تفريط ولا مغالاة فيه ولا تقصير أي التوازن وهذا حسب التوجيه القرآني".

وينقسم الإقتصاد إلى قسمين : النظام الإقتصادي وعلم الإقتصاد.

**<u>والنظام الإقتصادي</u>** : ناحية فكرية تتعلق بوجهة النظر في الحياة باعتباره فكرا ينبثق من عقيدة معينة أو أيديولوجية معينة أي ينظر في كيفية حيازة المنفعة وكيفية الإنتفاع بالثروة.

**<u>وأما علم الإقتصاد</u>** : فهو ناحية عقلية بحتة دائرتها الخبرة البشرية وتهتم بمادة الثروة من حيث تنميتها.

**<u>علم الإقتصاد</u>** : إن علم الإقتصاد هو ناحية عقلية بحتة دائرتها الخبرة البشرية وتهتم بمادة الثروة حيث ينصب على النشاط الإقتصادي الذي تتم من خلاله عمليات تخصيص الموارد المتاحة في ثلاث عمليات أساسية هي الإنتاج، الإستهلاك والتبادل.

ويمكننا تعريف العمليات الثلاث الأساسية في النشاط الإقتصادي فيما يلي :

**الإنتاج** : تعتمد الحياة الدنيا في قيامها واستمرارها ونموها وتقدمها على الإنتاج. والإنتاج هو إعداد وموائمة الموارد المتاحة لإشباع الرغبات البشرية وذلك بتغيير نوعيتها المادية والكيمياوية أو الحيوية لتحويلها إلى الصورة التي تحقق الإشباع. ويشتمل الإنتاج أيضا التغيير، المكاني ( النقل ) والتغيير الزماني ( التخزين ) لتلك الموارد. ويوجه الإنتاج نحو:

1 ــ توفير الموارد الإستهلاكية والإنتاجية ( ثروة الأموال ).

2 ــ توفير الثروة البشرية كما ونوعا.

**الإستهلاك** : ويعني الإستخدام المباشر للموارد الإقتصادية في صورتها الجديدة لإشباع الرغبات.

**التبادل** : هو انتقال الموارد بين الوحدات الإقتصادية التي تقوم باتخاذ القرارات الإقتصادية وهذه الوحدات هي وحدات إنتاجية أو وحدات استهلاكية أو إنتاجية واستهلاكية في نفس الوقت.

**دور النظرية العلمية** : لكل علم نظريات وينحصر دور النظرية العلمية عامة في مساعدتنا على التفسير والتنبؤ المشروط بالأحداث، وللنظرية العلمية ثلاثة أسس هي :

1 ــ مجموعة من التعاريف التي تبين بدقة ووضوح ما نعنيه ببعض المصطلحات.

2 ــ مجموعة من الفروض التي تحدد طبيعة البيئة والظروف التي تعمل فيهما النظرية.

3 ــ وضع تنبؤات عن تسلسل الأحداث المتوقعة تحت هذه الظروف.

إن النظرية الإقتصادية تخضع لنفس الأسس العلمية مع وجود كثـــرة الفروض، لأن دور الباحث الإقتصادي أعقد من دور الباحث المخبري حيث المحددات قليلة ومحددة، أما الباحث الإقتصادي فلا يمكنه التحكم في جميــع المتغيرات في المجتمع لكثرتها ونسبيتها. فإذا أراد باحث إقتصادي دراســة علاقة ما فعليه دراسة العلاقة بين متغيرين أو ثلاثة من بــين العديــد مــن المتغيرات مع فرض باقي المتغيرات ثابتة في لحظة زمنية معينة ثم التعميم. والمقصود بإدخال الفروض هو التبسيط للواقع من أجل التنظيــر العلمــي. ويعتبر التنظير العلمي تجريد للواقع والإبتعاد عنه بعض الشـــيء. وإذا لــم نجرد الواقع فإننا لن نضيف شيئا إلى مفهومنا للعلاقات بين المتغيرات. إذن النظرية الجيدة هي التي تقوم بعلمية التجريد بطريقة تفيدنا في اكتشاف هــذه العلاقات.

ولكن ما هو المنهج المتبع في علم الإقتصاد ؟

هناك طريقتان أساســيتان يســتخدمها الإقتصـــادي وهمـــا الطريقـــة الإستنباطية والطريقة الإستقرائية، وهو يتوصل عادة نتيجة استخدام أحدهما إلى وضع القوانين الإقتصادية ولإثبات صحة القانون الإقتصـــادي يســـتخدم الإقتصادي الطريقتين معا.

وبالتالي فإن الطريقتين متكاملتان.

<u>أ) ـــ الطريقة الاستنباطية</u> : تتميز هذه الطريقة باستخدام الرياضـــيات ويعرف هذا المنهج من الناحية العلمية بأسلوب بنـــاء أو تركيـــب النمـــاذج والنموذج الإقتصادي يحاول إعطاء طريقة علمية لتفسير جانب أو جوانـــب معينة للاقتصاد فمثلا تعتبر الأسعار والكميات والدخول متغيـــرات يحـــاول النموذج تفسير العلاقة بينها. والنموذج الإقتصادي افتراضي أكثر منه واقعي كما أنه

إنتقائي في طابعه حيث يقوم منشئ النموذج باختيار عدد محدود من العوامل التي تبدو أكثر أهمية من غيرها بالنسبة للظاهرة محل الدراسة. إذن يستخدم في وضع النماذج التفكير العقلي المنطقي.

**ب ـ الطريقة الإستقرائية** : تدفع الصعوبات التي تحد من فعالية التفكير العقلي المجرد الإقتصادي إلى إتباع طريقة أخرى تحليلية هي الطريقة الإستقرائية. وفي هذه الطريقة يعتمد الإقتصادي أساسا على الوقائع التاريخية والبيانات الإحصائية، وهو يحاول التوصل إلى نتائج وتعميمات عن طريق التحليل المنظم للوقائع مثال دراسة العلاقة بين الإستهلاك والدخل ـ الطب على سلعة وسعرها ـ العلاقة بين الإنتاج وتكاليف الإنتاج.

كما يمكننا القول بما أن علم الإقتصاد يخص البناء الإقتصادي، ذلك الجزء المتطور من الإقتصاد، فإنه يجب إخضاعه للمنهج المعاير أي يدور حول محور النظام الإقتصادي.

تتم الدراسة والبحث على مستويين وحدي وكلي أي ينقسم علم الإقتصاد إلى أقسام ومن أقسامه الرئيسية الإقتصاد الوحدي والإقتصاد الكلي وكلاهما ضروري للدراسة الإقتصادية، حيث يحاول الإقتصاد الوحدي أن يعطينا تفسيرا علميا وعمليا للسلوك الإقتصادي للوحدة الإقتصادية منفردة، منتج ، مستهلك، سوق سلعة معينة. أما الإقتصاد الكلي فإنه يعطينا تفسيرا عمليا لسلوك المجموعات ككل، مثل التوظيف ـ الدخل القومي، ومؤشرات التسعير الكلية. ويمكننا أن نعرف الإقتصاد الكلي بأنه دراسة للسلوك الإقتصادي العام.

يمكننا التفريق بين النماذج الإقتصادية على المستوى الوحدي أو الكلي من ناحيتين الأولى زمنية والثانية بمستوى المعرفة بظروف البيئة المحيطة مما يسمى أو يعرف بأنواع التحاليل وهي أربعة.

1 ـ تحليل ساكن في ظروف تأكد : ونعني أن التحليل يتم في لحظة زمنية مع معرفة كل المعلومات بدقة.

2 ـ تحليل ساكن في ظروف عدم تأكد : ونعني به أن التحليل يتم في لحظة زمنية مع كون كل المعلومات إحتمالية.

3 ـ تحليل حركي في ظروف تأكد : ونعني به أن التحليل يتم في تتابع زمني مع معرفة المعلومات بدقة.

4 ـ تحليل حركي في ظروف عدم تأكد : ونعني به أن التحليل يتم في تتابع زمني مع كون المعلومات إحتمالية.

نطرح هنا سؤالا، ما هو التوازن الإقتصادي ؟

نلاحظ في الحياة الإقتصادية الحديثة تداخل وتشابك الكثير من القرارات الإقتصادية التي تتخذها الوحدات الإقتصادية والخاصة باستخدام الموارد، وعندما تتوافق القرارات الإقتصادية التي تتخذها مختلف الوحدات الإقتصادية مع بعضها يصل الإقتصاد إلى حالة التوازن وهذا مع مراعاة الإعتدال.

وفي حالة التوازن الإقتصادي تساوي كمية الموارد التي ترغبها الوحدات الإقتصادية مع كمية الموارد المتاحة في الإقتصاد ككل، وإذا لم يحدث ذلك يكون الإقتصاد في حالة عدم توازن ولإعادة التوازن يجب العمل على تحقيق التوازن بين القرارات الإقتصادية عن طريق التنسيق بينها باتباع التخطيط أو عن طريق قوى السوق.

ولقد دفعنا إلى كتابة هذا الكتاب المتواضع فقر المكتبة الجزائرية لمثل هذه الكتب باللغة العربية. ولهذا أضع هذا الكتاب بين أيدي الطلبة والمهتمين بالشؤون الإقتصادية.

إن هذا الكتاب يمثل دراسة مبسطة في التحليل الوحدي راعيت فيها مستوى طلبة العلوم الإقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية وإن وفقني الله سأتبعه بجزء ثاني خاص بالتمارين المحلولة والمبسطة.

ينقسم هذا الكتاب إلى مقدمة وثمانية أبواب هي :

الباب الأول : تذكرة رياضية.

الباب الثاني : نظرية الطلب والعرض.

الباب الثالث : نظرية سلوك المستهلك.

الباب الرابع : نظرية سلوك المنتج.

الباب الخامس : السوق وتوازن المنتج.

الباب السادس : تسعير عوامل الإنتاج ( نظرية التوزيع ).

الباب السابع : التوازن العام واقتصاد الرفاهية.

الباب الثامن : دوال الإنتاج الخطية.

# الباب الأول

# تذكرة في الرياضيات

## تمهيد

إن النموذج الإقتصادي المنصب على تفسير جانب أو عدة جوانب من الظاهرة الإقتصادية، والمستنتج عن طريق الإستنباط أو الإستقراء، يدرس سلوك هذه الظاهرة الناتج عن العلاقة بين الظاهرة الإقتصادية ومحدداتها كالعلاقة بين متغير تابع ومتغير مستقل أو أكثر.

يستعمل في إيجاد النموذج الرياضيات والتي هي نظام منطقي يستعمل لعمليات تجرى في عالم التجريد. هذه الرياضيات استخدمها الإقتصاديون في إيجاد النموذج ودراسة العلاقات الدالية بين المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة عن طريق التجريد العلمي للظاهرة أي التجريد العلمي للواقع والإبتعاد عنه بعض الشيء في دراسة الظاهرة.

في هذا الباب سنتناول الفصول التالية:

1 ـ المحددات والمعادلات الآنية.

2 ـ التوابع.

3 ـ المعادلات التفاضلية ومعادلات الفروق.

# الفصل الأول
# المحددات والمعاملات الآتية

## I ـ المحددات والمعادلات الآنية :

كثيرا ما تدعو الحاجة في علم الإقتصاد إلى حل مجموعة من المعادلات المتعددة المتغيرات بطريقة آنية حيث يوجد لها حل يضمن تحقيقها جميعا في آن واحد. وبصورة عامة يمكننا كتابة نظام المعادلات المكون من n معادلة محتوية على n من المتغيرات في الصورة:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, a_{1n}\, x_n = b_1$$
$$a_{21}\, x_2 + a_{22}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, a_{2n}\, x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, a_{in}\, x_n = b_i$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \, a_{nn}\, x_n = b_n$$

حيث يشير $x_J$, $(J = 1,2 \ldots\ldots n)$ إلى المتغيرات المختلفة في المعادلات. وترمز $a_{iJ}$ حيث $(i,J = 1, 2, \ldots, n)$ إلى معامل المتغير رقم j في المعادلة i.

مثال ذلك $a_{32}$ يشير إلى معامل المتغير الثاني في المعادلة الثالثة أما $b_i$ حيث $(i = 1,2,\ldots\ldots n)$ تشير إلى ثوابت المعادلات. ويمكننا حل هذه المعادلات لإيجاد قيم $x_j$ بإحدى الطرق الثلاثة التالية:

1 ـ طريقة التعويض ، 2 ـ طريقة المصفوفات، 3 ـ طريقة المحددات. وسنتناول في هذا الفصل طريقة المحددات.

إن حل المعادلة الخطية $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n = b_1$

هو متتابعة من n من الأعداد $S_1 , S_2 , ........S_n$ تحقق المعادلة

عند إجراء التعويض $X_1 = S_1, \quad X_2 = S_2, \quad X_n = S_n$. تسمى الفئة المكونة

من كل حلول المعادلة بفئة الحل لها.

## 1 ـ شروط وجود حل وحيد لمجموعة من المعادلات:

لكي يكون لمجموعة من المعادلات الخطية الآتية حل وحيد يجب أن

تتوافر ثلاثة شروط هي:

### 1 . 1 ـ اتساق المعادلات :

تكون المعادلة متسقة إن لم تتضمن معلومات متضاربة، وتنشأ مشكلة

عدم الإتساق أساسا إذا كانت نسبة معاملات معادلة إلى معاملات معادلة أخرى

في نظام المعادلات واحدة ولكن نسبة الثابتين مختلفة.

**مثال:** $5 X_1 + 3 X_2 = 4$

$$10 X_1 + 6 X_2 = 10$$

إن المعادلة الثانية ما هي إلا المعادلة $5 x_1 + 3 x_2 = 5$

مضروبة في معامل ثابت هو 2 نلاحظ أن :

في المعادلة الأولى : $5 X_1 + 3 X_2 = 4$

في حين في المعادلة الثانية : $5 X_1 + 3 X_2 = 5$

وهذا تضارب.

**1. 2 ـ استقلال المعادلات :**

إذا كانت معاملات معادلة من المعادلات مضاعف ثابـت المعـاملات معادلة أخرى، يقال أن المعادلتين غير مسـتقلتين، حيـث تتضـمنان نفـس المعلومات ويمكن تمثيلهما هندسيا بخطين متطابقين، وبالتالي يلتقيان في عدد لا نهائي من النقط أي عدد حلول المعادلتين لا نهائي.

مثال 1 :

$$5X_1 \quad 3X_2 = 4$$

$$10X_1 + 6X_2 = 8$$

وهذا يعني أن :

$$5X_1 \quad 3X_2 = 4$$

و

$$2.(5X_1 + 3X_2) = (4).(2)$$

وبالتالي في الواقع لدينا معادلة واحدة بمتغيرين بطلب تحديدهما ويـتم حل هذه المعادلة بصورة تحكيمية فكلما أعطينا قيمة للمتغير $X_1$ نحصل علـى قيمة للمتغير $X_2$ وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول.

مثال 2 :

$$X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$5X_1 + 3X_2 + X_3 = 4$$

$$7X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 8$$

**نلاحظ أن المعادلة الثالثة = 2. ( المعادلة الأولى + المعادلة الثانية )**
وبالتالي فإن هذه المعادلات غير مستقلة خطيا ويمكن حلها بافتراض أي قيمة لأحد المتغيرات وحل المعادلتين المستقلتين بدلالة هذا المتغير وبالتالي يوجد لهذه المجموعة عدد لا نهائي من الحلول.

إذن إذا أمكن التعبير عن إحدى المعادلات في نظام معادلات آنية في صورة توافقية خطية لمعادلتين أو أكثر نقول أن تلك المعادلات غير مستقلة خطيا.

**1. 3 ـ تساوي عدد المعادلات مع عدد المتغيرات :**

إذا كانت مجموعة المعادلات متسقة ومستقلة وعدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات فإنه يمكن إيجاد حل وحيد للمجموعة.

وأما إذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات فللمعادلات عدد لا نهائي من الحلول.

وأما إذا كان عدد المعادلات أكبر من عدد المتغيرات فللمعادلات أكثر من حل إذا كانت المعادلات الزائدة مرتبطة خطيا.

**2 ـ المحددات وخواصها:**

إذا عدنا إلى مجموعة المعادلات الآنية التي تتوفر فيها شروط وجود حل وحيد يمكننا ترتيب معاملاتها $a_{ij}$ في صورة مربع أبعاده $n . n$ ، حيث $n$ هو عدد المعادلات وعدد المتغيرات، ويطلق على المقدار المشتق وفقا

لقواعد معينة من هذه المجموعة من الأرقام المرتبة في صورة مربـــع إســم محدد المعاملات A ويرمز للمحدد بالطريقة التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots\cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

مثال:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 1$$

$$X_1 + X_3 = 4$$

$$2X_1 + 5X_2 + X_3 = 4$$

المحدد هو:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

ونرمز لعناصر محدد المعاملات A بالرمز $a_{ij}$ حيث I يرمز لرقم الصف و J يرمز لرقم العمود في المحدد.

## 2. 1 – المحيددات :

يطلق إسم المحيدد على المحدد الذي نحصل عليه من المحدد الأصلي $|A|$ باستبعاد أي عدد من صفوفه وعدد مماثل من أعمدته ويرمز له بالرمز $M_{IJ}$.

أمثلة :

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ هو محيدد ناتج من استبعاد ( N -2 ) صف و ( n - 2 ) عمود من المحدد الأصلي $|A|$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1.n-1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2.n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1.1} & a_{n-1.2} & a_{n-1.n-1} \end{vmatrix}$$

هو محيدد ناتج من استبعاد الصف والعمود الأخيرين من المحدد الأصلي $|A|$.

## 2. 2 – المرافقات ( المتممات ) :

يطلق إسم المرافق أ والمحدد المرافق $C_{IJ}$ للعنصر $a_{IJ}$ على المحيدد $M_{IJ}$ الذي نحصل عليه باستبعاد الصف I والعمود J من المحدد الأصلي $|A|$ وذلك بعد وضع الإشارة الجبرية الملائمة أمام هذا المحيدد ويكون المرافق من الشكل:

$$C_{IJ} = (-1)^{I+J}.M_{IJ}$$

حيث إذا كان ( I + J ) عدد فردي يضرب المحيدد في ( - 1 ) وإذا كان ( I + J ) عدد زوجي يضرب المحيدد في ( 1 ).

مثال : ليكن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

1 ـ المحدد المتمم ( المرافق ) للعنصر $a_{11}$.

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

2 ـ المحدد المتمم ( المرافق ) للعنصر $a_{23}$.

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

## 2. 3 ـ حساب قيمة المحدد :

قيمة المحدد هي حاصل جمع كل حواصل الضرب الأولية المميزة من $|A|$.

مثال 1 :

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- +

مثال 2 :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- - - + + +

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

**<u>في المثال الأول</u> : حصلنا على المحدد بضرب العناصر في السهم** المتجه إلى اليمين وطرحنا منها حاصل ضرب العناصر في السهم المتجه إلى اليسار.

<u>في المثال الثاني</u>: حصلنا على المحدد بما يلي :

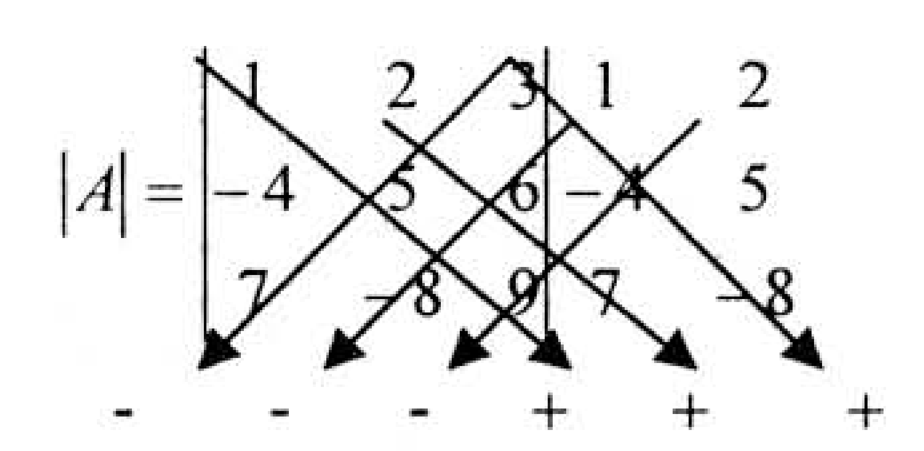
1 ـ إعادة كتابة العمودين الأول والثاني.

2 ـ حساب المحدد بجمع حواصل الضرب في الأسهم المتجهة إلى اليمين وطرح حواصل الضرب في الأسهم المتجهة إلى اليسار.

**<u>في المثال الثالث</u> :**

$$|A| = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

**<u>في المثال الرابع</u> :**



$$|A| = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$

<u>ملاحظة</u> : إن الطريقة الموضحة في الأمثلة السابقة لا تصلح للمحددات من النوع 4 × 4 فما أكثر لصعوبة الحسابات فمثلا إذا كان المحدد من النوع 4 × 4 فإن قيمته تتضمن 24 = ! 4 من حواصل الضرب الأولية المميزة، وكذلك حساب قيمة محدد من النوع 10 × 10 تتضمن حساب 3.628.800 = !10

من حواصل الضرب الأولية المميزة، لهذا من أجل حساب قيمة المحدد نستخدم تعريف المرافقات بالإضافة إلى استخدام خواص المحددات.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{IJ}.C_{IJ} = a_{I1}.C_{I1} + a_{I2}C_{I2} + .....+ a_{IN}C_{IN}$$

حيث نثبت رقم الصف ونغير في رقم الأعمدة أو

$$|A| = \sum_{I=1}^{n} a_{IJ}.C_{IJ} = a_{1J}.C_{1J} + a_{2J}C_{2J} + .....+ a_{nJ}C_{NJ}$$

حيث نثبت رقم العمود ونغير في الصفوف.

<u>مثلا</u> : إذا استخدمنا العمود الأول :

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + .....a_{n1}C_{n1}$$

إذن نلاحظ أنه يمكن حساب قيمة المحدد بفكه بدلالة أي صفا أو أي عمود.

## <u>2. 4 ـ خصائص المحددات</u> :

1 ـ إذا بدلنا جميع صفوف المحدد محل أعمدته وأعمدته محل صفوفه فإن قيمة المحدد لا تتغير.

2 ـ إن إبدال أي عمود ( أو صف ) مكان عمود ( أو صف ) آخر يغير الإشارة الجبرية.

**مثال** 1:

$$|A|=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=(3).(1)-(-2).(1)=-5$$

$$|A|=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}=(3).(1)-(-2).(1)=-5$$

نلاحظ أنه عندما بدلنا جميع الصفوف محل أعمدة المحدد فإن قيمة المحدد لم تتغير.

**مثال** 2 :

$$|A|=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}=(3).(1)-(-2).(1)=5$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(-2).(1)-(1).(3)=-5$$

نلاحظ لما بدلنا العمود الأول مكان العمود الثاني تغيرت إشارة المحدد.

3 ــ إذا تساوت مكونات أي عمودين أو صفين فإن قيمة المحدد تصبح صفرا.

**مثال 1** :

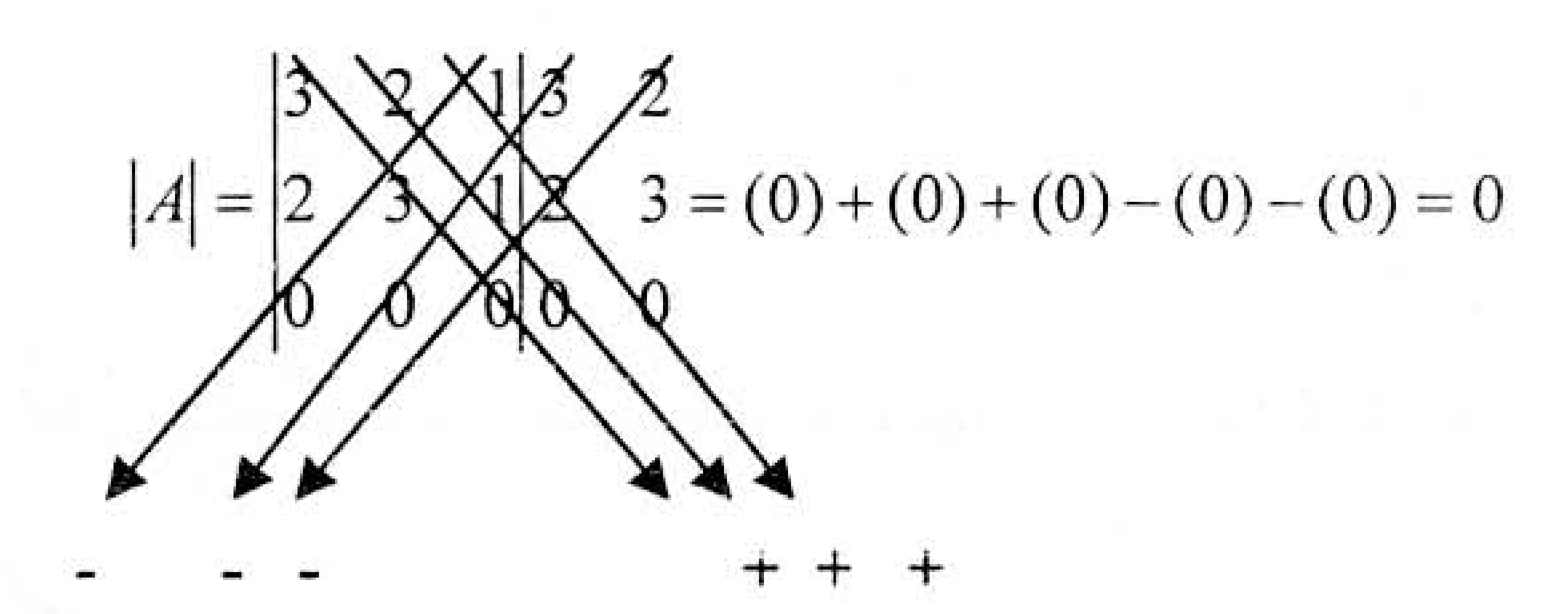
$$|A|=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 5 & 5\end{bmatrix}=(3).(5)-(3).(5)=0$$

**مثال 2:**

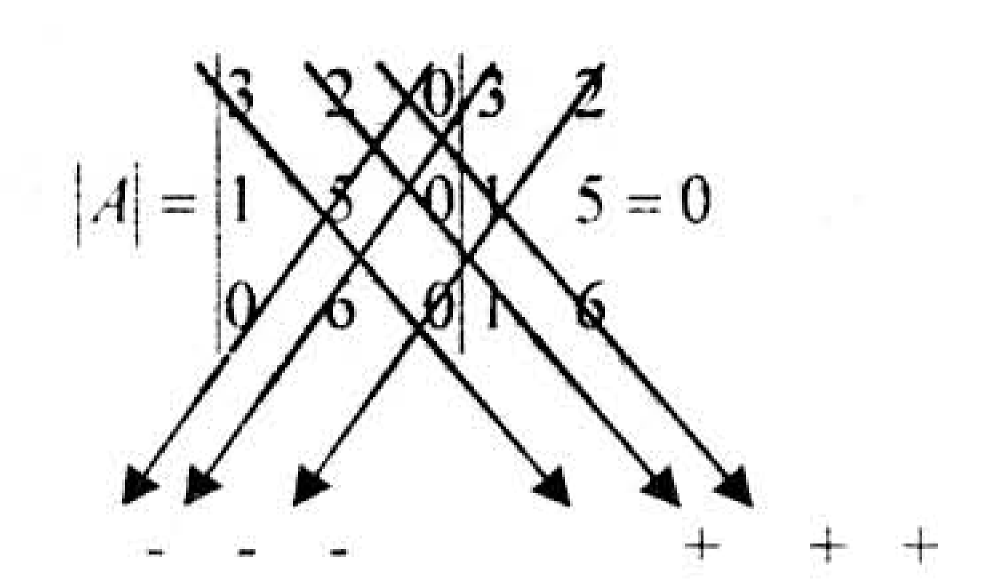
$$|A|=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=(2).(1)-(1).(2)=0$$

4 ـــ إذا كان المحدد ( A ) من النوع n x n له صف من الأصفار فـــإن قيمة المحدد تساوي صفرا وكذلك إذا كان أحد أعمدته كله أصفار.

**مثال 1 :**



**مثال 2:**



5 ـــ إذا ضربنا أي صف I ( أو عمود J ) من المحدد في K فإن قيمـــة المحدد تصبح باستخدام

$$|A| = Ka_{11}C_{11} + Ka_{12}C_{12} + ..... + Ka_{1N}C_{IN}$$

بدلالة الصف I

$$|A^*| = K\,a_{i1}\,C_{i1} + K\,a_{i2}\,C_{i2} + ............K\,a_{in}\,C_n$$

مثال : لدينا :

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 35$$

6 ـــ إذا كانت المحدد $|A|$ هو محدد لمصفوفة مثلثية من النوع n x n فإن هذا المحدد يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$|A| = a_{11} . a_{22} . a_{33} .......... a_{nn}$$

**مثال1 :**

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (2).(-3).(6).(9).(4) = -1296$$

**مثال 2 :**

$$|A| = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = (2).(1).(4).(2) = -16$$

7 ـــ إذا ضربنا جميع عناصر المحدد في رقم ثابت فتصبح قيمة المحدد $|A|$ مساوية إلى $K^n|A|$ حيث n عدد الصفوف أو الأعمدة في المحدد.

**مثال :**

لدينا المحدد: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -13$

فإذا ضربنا جميع العناصر في 3 يصبح المحدد

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 15 & -3 \end{vmatrix} = (9).(-3) - (15)(6) = -27 - 90 = -117$$

**وهي نفسها**

$$|A^*| = 3^2.A = 3^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3^2(-13) = 9(-13) = 117$$

8 ـــ إذا ضربنا أي صف ( أو عمود ) في المرافقات المقابلة لصف (أو عمود ) آخر فإن قيمة المحدد تساوي صفر.

## II ــ طريقة المحددات في حل المعادلات الآنية : قاعدة كرامر.

إذا كان $AX = B$ نظاما من n معادلة من المعادلات الخطية متغير بحيث المحدد $|A| \neq 0$ ، وهذه المعادلات تتوفر فيها شروط الحل الوحيد التي تعرضنا لها سابقا فإن للنظام حل وحيد هو:

$$X_J = \frac{|A_J|}{|A|}$$

حيث $A_J$ هو المحدد الناتج عن إحلال عمود الثوابت B حيث $B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{vmatrix}$

محل العمود J ( لاحظ أن العمود J هو عمود معاملات المتغير $SC_J$).

**مثال 1 :**

$$X_1 = \frac{A_1}{A}$$

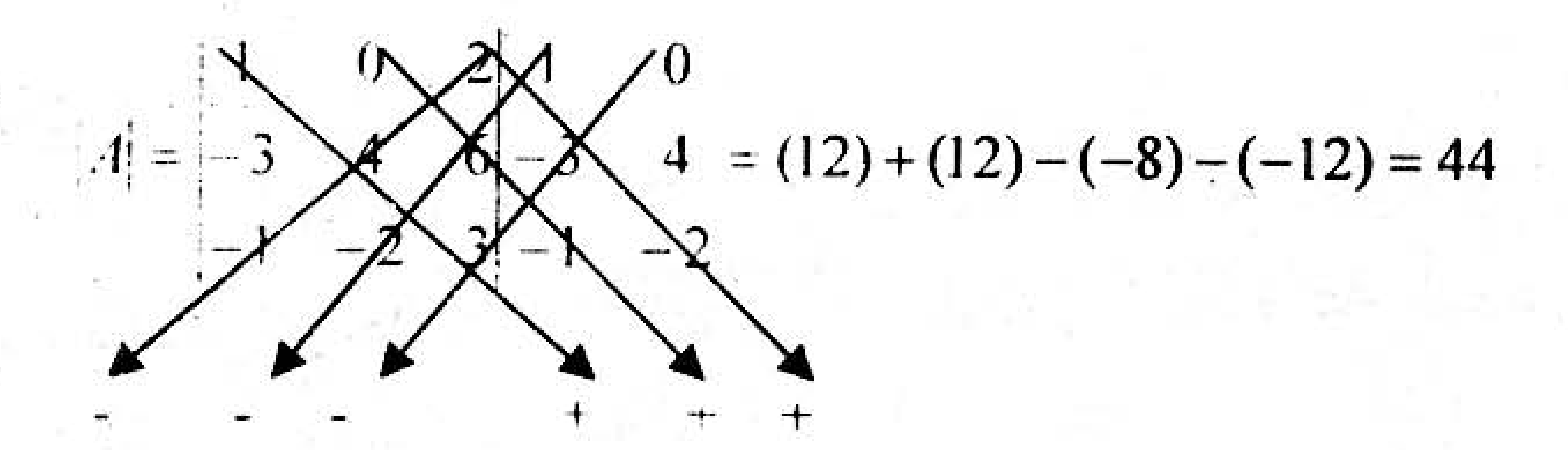
$$X_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$X_n = \frac{A_n}{A}$$

**مثال 2 :**

$$\begin{aligned} &X_1 + 2X_3 = 6 \\ &-3X_1 + 4X_2 + 6X_3 = 30 \\ &-X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 8 \end{aligned}$$

هذه المعادلات متسقة، ومستقلة خطيا، وعدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل.




بنفس الطريقة

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$$

بنفس الطريقة

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72$$

بنفس الطريقة

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

إذن

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

**ملاحظات :**

1 ــ إذا كانت $|A| = 0$ يقال أن صفوف المحدد تابعة خطيا أو أنها ليست مستقلة خطيا وبالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول لمجموعة المعادلات.

2 ــ إذا كانت المعادلات متجانسة أي $bi = 0$ حيث $I = 1,2, \ldots n$ والمحدد $A \neq 0$ فإن جميع المتغيرات تساوي الصفر لأن $|A_J| = 0$ بسبب وجود عمود به كل عناصره مساوية للصفر.

أما اذا كانت $|A| = 0$ تصبح قيم $X_J$ غيــر محــددة لأن $A_J = 0$ ، $A = 0$ ، $A = 0$

وبالتالي $X_J = \frac{0}{0}$ غير محددة.

# الفصل الثاني

# التوابع

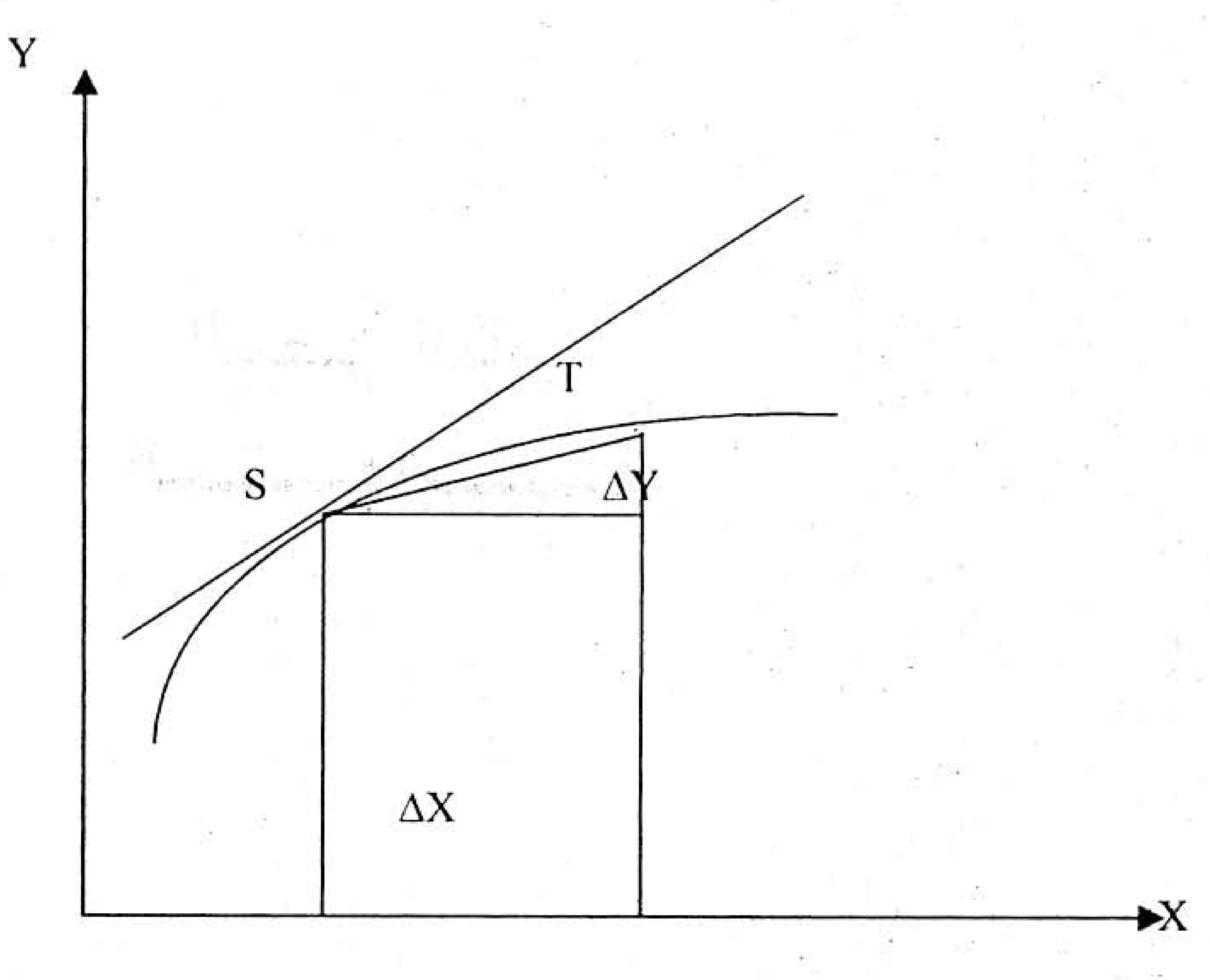
## I ـ التوابع ذات متغير واحد :

### 1. مشتق التوابع لمتغير واحد :

تعرض الدالة f (X) معرفة ومستمرة ضمن مجال مغلق، فإذا كانت النهاية

$$Lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = Lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x-\Delta X)-f(X)}{\Delta X} = L$$

معرفة ومحدودة فإن هذه الدالة تملك مشتقة هي $f'(X) = \frac{dY}{dX}$




**الشكل رقم I. 1**

نثبت النقطة S على المنحنى ونحرك T باتجاه S نلاحظ أن التغير ΔX يصغر إلى أن يجعل النقطة T قريبة جدا من النقطة S فإن ΔX في هذه الحالة

يقترب من الصفر. وعندما تنطبق النقطة T على النقطة S يصبح الـوتر (ST) مماسا للمنحنى في النقطة S ( أنظر الشكل رقم I، 1 ).

## 2 ـ قوانين المشتقات :

$$f(X)=C \Rightarrow f'(X)=0$$

$$f(X)=X^{n} \Rightarrow f'(X)=nX^{n-1}$$

$$f(X)=g(X).h(X) \Rightarrow f'(X)=g'(X).h(X)+g(X).h'(X)$$

$$f(X)=g(X) \Big/ h(X) \Rightarrow f'(X)=\left[g'(X).h(X)-g(X).h'(X)\right] \Big/ \left[h(X)\right]^{2}$$

هذه بعض القوانين للمشتقات على سبيل المثال لا على سبيل الحصر.

## 3 ـ المشتقات من الدرجة الأعلى :

تعرف مشتقة المشتقة أو المشتقة من الدرجة الثانية والتي يرمز لها بالرمز $dy^2 \Big/ dx^2$ أو $f''(x$ كما يلي :

$$f''(x)=\frac{dy^{2}}{dx^{2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

وبنفس الطريقة يمكن تعريف المشتقة من الدرجة n حيث يرمز لها بالرمز $\frac{d^{n}y}{dx^{n}}$.

## II ـ التوابع ذات عدة متغيرات :

في الحياة الإقتصادية تقابلنا كثيرا من الحالات تحتوي فيها الدالة علـى أكثر من متغير مستقل وعندئذ يقال عنها دالة متعددة المتغيرات مثـال ذلـك تكون الكمية المطلوبة تابعة لسعر السلعة وأسعار السلع المنافسة لها وكـذلك

أسعار السلع المكملة لها والدخل وأذواق المستهلكين وعدد المستهلكين والفترة الزمنية...إلخ.

لتكن Y تابع لـــ n متغير مستقل.

$$y=f(x_1,x_2,.....x_i,......x_n)$$

## 1 ـــ المشتقة الجزئية من الدرجة الأولى :

نعني بها أثر تغير أحد المتغيرات المستقلة على الدالة، مع بقـــاء بـــاقي المتغيرات الأخرى على حالها.

إذن :

تعرف المشتقة الجزئية من الدرجة الأولى للتابع Y بالنسبة للمتغير المستقل $x_i$ حيث $i = 1, 2 \ldots\ldots n$ والذي يرمز له بالرمز $f_i = \frac{\delta y}{\delta x_i}$ بالشكل:

$$f_i = \frac{\delta y}{\delta x_i} = Lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_i + \Delta x_i \ldots\ldots x_n) - f(x_1, x_2, x_i, -x_n)}{\Delta x_i}$$

ونلاحظ هنا أنه للدالة ذات n متغير مستقل n مـــن المشـــتقات الجزئيـــة الأولى المباشرة.

مثال :

$$y = x_1 + 3x_2 - 4x_1^2 x_2^2 + 5x_1^3 x_2^4$$

$$f_1 = \frac{\delta y}{\delta x_1} = 1 - 8x_1 x_2^2 + 15x_1^2 x_2^2$$

$$f_2 = \frac{\delta y}{\delta x_2} = 3 - 8x_1^2 x_2 + 20x_1^3 x_2^3$$

## 2 ـ المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية :

يوجد نوعان من المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية هي :

### 2. 1 ـ المشتقات الجزئية المباشرة من الدرجة الثانية:

يمكن الحصول عليها بإعادة إشتقاق الدالة مرة ثانية بالنسبة للمتغير نفسه.

المشتق الثاني بالنسبة للمتغير $x_1$ :

$$f_{11} = \frac{\delta \frac{\delta y}{\delta x_1}}{\delta x_1} = \frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2} = -8x_2^2 + 30x_1 x_2^4$$

المشتق الثاني بالنسب للمتغير $x_2$ :

$$f_{22} = \frac{\delta \frac{\delta y}{\delta x_2}}{\delta x_2} = \frac{\delta^2 y}{\delta x_2^2} = -8x_1^2 + 60x_1^3 x_2^2$$

### 2.2 ـ المشتقات الجزئية التبادلية من الدرجة الثانية :

ونحصل عليها بإعادة إشتقاق الدالة مرة أخرى ( ثانية ) بالنسبة لمتغير اخر.

**مثال :**

المشتق الثاني التبادلي للتابع بالنسبة للمتغير $x_2$ في مثالنا السابق.

$$f_{12} = \frac{\delta \frac{\delta y}{\delta x_1}}{\delta x_2} = \frac{\delta^2 y}{\delta x_1 \delta x_2} = -16x_1 x_2 + 60x_1^2 x_2^3$$

المشتق الثاني التبادلي للتابع بالنسبة للمتغير $x_1$:

$$f_{21} = \frac{\delta \frac{\delta y}{\delta x_2}}{\delta x_1} = \frac{\delta^2 y}{\delta x_2 \delta x_1} = -16x_1 x_2 + 60x_1^2 x_2^3$$

نلاحظ أن المشتقات الجزئية التبادلية متساوية أي : $f_{12} = f_{21}$

كما نلاحظ مجموع عدد المشتقات الجزئية الثانية المباشرة والتبادلية لدالة من n متغير مستقل هو : $n.n = n^2$.

أي لو كانت الدالة بها 4 متغيرات فإن عدد المشتقات الجزئية الثانية 16 مشتقا يمكن كتابتها في شكل مصفوفة من النوع $16 = 4 \times 4$ وتسمى هـذه المصفوفة بالمصفوفة الهيسية.

$$F = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix}$$

### 3 ـ المشتقة التفاضلية الكلية :

لقد لاحظنا المشتقة الأولى لدالة ذات متغير واحد هي : $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ أو $dy = f'(x)dx$.

وبالتالي يمكن تعريف التفاضل الكلي لدالة ذات عدة متغيرات بالصيغة.

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \ldots\ldots\ldots f_i dx_i + \ldots\ldots f_n dx_n$$

وهي معادلة المسطح المماس للسطح المحدد بالدالة.

$$y = f(x_1, x_2, x_i \ldots\ldots\ldots x_n)$$

## 4 ـ القيم العظمى و الصغرى :

### 4. 1 ـ القيم العظمى و الصغرى للدالة ذات متغير واحد :

حتى تكون الدالة عند نهاية عظمى أو صغرى يجب أن يتوفر شـرطان هما:

**الشرط اللازم** : هو وجود نقطة استقرار حيث أي تغير في X لا يـؤدي إلى تغير في Y أي:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

**الشرط الكافي** : وهو البحث عن المشتق من الدرجة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

فإذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ عندما نعوض بقيم X التي حصلنا عليهـا عنـدما ساوينا المشتق الأول بالصفر نقول أن للدالة $y = f(x)$ نهاية صـغرى، أمـا إذا كانت $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ نقول أن للدالة $y = f(x)$ نهاية عظمى.

**مثال** : $y = f(x) = x^3 - 12x + 3$

**الشرط اللازم** : $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

**الشرط الكافي** : $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

عندما $X = 2$ فإن $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = 12 > 0$

أي للدالة عندما x = 2 نهاية صغرى

عندما x = − 2 فإن $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x = -12 \langle 0$

أي للدالة عندما x = − 2 نهاية عظمى.

## 4. 2 ــ القيم العظمى والصغرى غير المشروطة لدالة ذات عدة متغيرات:

يجب توافر شرطين حتى تكون الدالة عند قيمة عظمى أو قيمة صغرى، وهما :

**الشرط اللازم** : هو أن تبلغ الدالة نقطة استقرار على السطح $y = f(x_1, x_2, x_i ..x_n)$.

وتكون عند هذه النقطة جميع المشتقات الجزئية الأولى للدالة بالنسبة للمتغيرات المستقلة مساوية للصفر أي $f_i = \frac{\delta Y}{\delta_{Xi}} = 0$ حيث i = 1, 2.....n.

**الشرط الكافي** : بعد أن نحصل على المصفوفة الهيسية للمشتقات الجزئية من الدرجة الثانية والتي تحتوي على n . n عنصرا، ومن هذه المصفوفة نحصل على المحدد الهيسي.

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \,........ f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} \,........ \, f_{2n} \\ f_{n1} & f_{n2} \,........ \, f_{nn} \end{vmatrix}$$

ثم نقوم بما يلي :

أ ــ نحسب المحيددات الرئيسية للمحدد الهيسي.

$$|H_3|, |H_2|, |H_1|, |H_{n-1}|$$

ب ــ إذا كانت قيم جميع المحيددات الرئيسية موجبة أي

$$H_3 \rangle 0 \,,\, H_2 \rangle 0 \,,\, H_1 \rangle 0$$

نقول المحدد $|H|$ أكيد الإيجاب وتكون الدالة قد بلغت نهاية صغرى.

ج ـ إذا كانت قيم المحيددات الرئيسية تتبادل الإشـــارة مبتدئـــة مـــن السالبة أي $|H_1|\langle 0, |H_2|\rangle 0, |H_3|\langle 0$ نقول المحدد $|H|$ أكيد السـلبية وتبلغ الدالة نهاية عظمى.

مثال :

$$Y = f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$$

$$f_1 = -4x_1 + x_2 = 0$$

$$f_1 = 2x_2 + x_1 = 0$$

وبحل المعادلتين نحصل على $(x_1, x_2) = (0,0)$ وهو الشرط اللازم.

**<u>الشرط الكافي</u> :**

**<u>لدينا</u> :**

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|H_2| = f_{11}\ f_{22} - f_{21}\ f_{12} = 7\rangle 0, |H_1| = -4\langle 0$$

أي تبلغ الدالة نهاية عظمى عندما $x_1 = x_2 = 0$

### <u>4. 3 ـ القيم العظمى والصغرى المشروطة لدالة ذات عدة متغيرات</u> :

نفرض أن التابع Y يساوي $y = f(x_1, x_2, x_3 ...., x_i ..... x_n)$ بحيث تحقق المتغيرات المستقلة الشرط $g = (x_1, x_2 ,....., x_i ..... x_n) = k$ وهو بمثابة قيد واحد؛ إلا أنه يجب التنبيه بإمكانية وجود أكثر من قيد واحد، ولكن يجب أن لا يتعدى عدد القيود عدد المتغيرات المستقلة.

ولإيجاد النهاية العظمى والصغرى يجب أن يتوفر شرطان هم : الشرط اللازم والشرط الكافي:

**الأسلوب الأول** : طريقة التعويض

الشرط اللازم :

إذا اتبعنا طريقة التعويض يكون لدينا تابعان هما :

$$y = f(x_1, x_2, ...., x_i, x_n)$$

$$g(x_1, x_2 .... x_n)$$

حيث يمكننا إيجاد قيمة أحد المتغيرات من الدالة الأخيرة بدلالة باقي المتغيرات ثم نعوضه في الدالة $y = f(x_1, x_2, ...., x_i, x_n)$ ثم نحسب المشتقات الجزئية الأولى ونساويها بالصفر، ثم نجد قيمة $x_1, x_2, x_3, ....., x_i .....x_n$

**الشرط الكافي** :

نتبع نفس الطريقة التي قمنا بها في النهايات العظمى والصغرى غير المشروطة.

**الأسلوب الثاني** : طريقة مضاعف لاقرانج.

إذا تجاوز عدد المعادلات في الشرط اللازم عن 3 معادلات يصعب حلها بطريقة التعويض وخاصة إذا كان هناك قيد، لهذا نستخدم طريقة مضاعف لاقرانج وهي طريقة أكثر عمومية.

تكتب الدالة في الصورة :

$$v = f(x_1, x_2 .....x_n, \lambda) = f(x_1, x_2)....x_n) + \lambda[k - g(x_1, x_2 ....X_n)]$$

حيث $\lambda > 0$ مضاعف لاقرانج وقيمته غير محددة ويعامل كأنه متغير مستقل في الدالة v ونلاحظ عندما $k = g(x_1, ....x_n)$ فإن القيمة القصوى للدالة v تساوي القيمة القصوى للدالة f .

وكذلك القيمة الصغرى للدالة v تساوي القيمة الصغرى للدالة f.

ولإيجاد النهاية العظمى أو الصغرى يجب أن يتوفر الشرطان :

**الشرط اللازم :**

يجب أن تبلغ V نقطة استقرار وهذا يكون عندما تساوي المشتقات الجزئية الأولى الصفر.

$$v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1} = f_1 - \lambda g_1 = 0$$

$$v_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} = f_2 - \lambda g_2 = 0$$

$$v_n = \frac{\partial v}{\partial x_n} = f_n - \lambda g_n = 0$$

$$v_\lambda = \frac{\partial v}{\partial_\lambda} = K - g(x_1, x_2, ....x_n) = 0$$

وعندما نحل هذه المعادلات نحصل على نقطة استقرار للدالة f عندما يتحقق الشرط $g = (x_1, x_2, ....x_n) = k$

**الشرط الكافي :**

بالنسبة لهذا الشرط نقوم بما يلي :

1 ـ نحسب المشتقات الجزئية الثانية للدالة V وتكون المحدد الهيسي.

$$|H| = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots\cdots v_{1n} \\ v_{21} & f_{22} & v_{23} & \cdots\cdots v_{2n} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & \cdots\cdots f_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \cdots\cdots v_{nn} \end{vmatrix}$$

2 ـ نحصل على المحددات الاتية بإحاطة المحيددات الرئيسية للمحـــدد الهيسي بصف وعمود مكونين من المشتقات الجزئية الأولى للقيد.

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & -g_1 \\ v_{21} & f_{22} & -g_2 \\ -g_1 & -g_2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & -g_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & -g_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & -g_3 \\ -g_1 & -g_2 & -g_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & -g_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & -g_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & -g_3 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & -g_4 \\ -g_1 & -g_2 & -g_3 & g_4 & 0 \end{vmatrix}$$

3 ـ إذا كانت جميع هذه المحددات سالبة فإن للدالة نهاية صغرى. أمـــا إذا تبادلت المحددات الإشارة مبتدئة بالموجبة فإن للدالة نهاية عظمى.

**مثال :**

إذا كانت $f = (x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

بشرط: $g = (x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + x_3 = 1$

استخدم طريقة مضاعف لاقرانج لإيجاد النهايـــة العظمـــى والصـــغرى للدالة.

$$v = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda[k - g(x_1, x_2, x_3)]$$

$$v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda[1 - 2x_1 - x_2 + x_3]$$

<u>الشرط اللازم</u> : البحث عن نقطة استقرار.

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_3} = 2x_3 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \lambda} = +1 - 2x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

وبحل هذه المعادلات نجد:

$$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{6}, x_3 = -\frac{1}{6}, \lambda = \frac{1}{3}$$

<u>الشرط الكافي:</u>

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & -g_1 \\ v_{21} & f_{22} & -g_2 \\ -g_1 & -g_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -10 \langle 0$$

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & -g_1 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & -g_2 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & -g_3 \\ -g_1 & -g_2 & -g_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -24 \langle 0$$

إن جميع هذه المحددات سالبة وبالتالي تبلغ الدالة نهاية صغرى عند النقطة $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$ .

# الفصل الثالث

# المعادلات التفاضلية ومعادلات الفروق

## I ـ المعادلات التفاضلية :

### 1 ـ تعريف المعادلات التفاضلية :

**تعريف** : المعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تربط بين مجهولين فأكثر ومشتقاتها ( أو تفاضلاتها ) أي هي معادلة تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر، أو تفاضل واحد أو أكثر لدالة ما، وقد تتضمن الدالة نفسها بعض المتغيرات المستقلة التي تعتمد عليها الدالة.

مثال ذلك المعادلات التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dt} = 2t \quad \text{أو} \quad dy = 2t \quad dt$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 5y = 0 \qquad \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^3 - 3\frac{dy}{dt} + y = t \text{ Int}$$

وقد تكون المعادلة التفاضلية اعتيادية إذا كانت دالتها بمتغير مستقل واحد والمشتقات التي فيها هي مشتقات اعتيادية بالنسبة لذلك المتغير مثال ذلك المعادلات التفاضلية السابقة.

وقد تكون المعادلات التفاضلية جزئية إذا احتوت دالة لأكثر من متغير مستقل واحد وكانت المشتقات التي فيها هي مشتقات جزئية، مثال ذلك :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

**الرتبة** : تنسب رتبة المعادلة التفاضلية إلى رتبة أعلى مشتق.

**الدرجة** : تنسب درجة المعادلة التفاضلية إلى أعلى قوة مرفوعا لها المشتق ذا الرتبة الأعلى، بشرط أن تكون بصيغة متعددة حدود بالدالة

ومشتقاتها أي بعد تبسيطها واختزالها بحيث تصبح الدالة ومشتقاتها مرفوعة إلى أسس صحيحة غير سالبة.

**أمثلة :**

$\frac{dy}{dt}=5t-2$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^4+t^2=0$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

$\left(\frac{d^4y}{dt^4}\right)^5+\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{d^2y}{dt^2}=20y$ وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة والدرجة الخامسة.

## 2 – حل المعادلات التفاضلية :

سنتناول هنا حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى.

إن الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى هي :

$$\frac{dy}{dt}=ay=b$$

حيث يمثل b الحد الثابت ويمثل a المعامل الثابت.

### 2 – 1 – حل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة :

تكون المعادلة التفاضلية المتجانسة من الشكل $\frac{dy}{dt}=ay=0$

ولها حلان حل عام وآخر نهائي ( خاص ).

**الحل العام :**

يكون للمعادلة حل عام إذا لم يكن هناك شرط بدائي والحل العام هو :

$$y(t) = Ae^{-at}$$

**مثال :**

$$\frac{dy}{dt} - 5t = 0$$

لدينا 5 − = a وبالتالي الحل العام هو

$$Y(t) = Ae^{5t}$$

**الحل النهائي ( الخاص )** : يكون للمعادلة حل خاص عند وجود شــرط بدائي الحل النهائي أو الخاص هو :

$$y(t) = y(0)e^{-at}$$

وفي مثالنا السابق $Y(t) = Y(0)e^{5t}$

**2. 2 ــ حل المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة :**

الصيغة العامة للمعادلة هي : $\frac{dy}{dt} = ay = b$

حيث $b \neq 0$

**الحل العام :**

$$y(t) = Ae^{-at} + \frac{b}{a}$$

**الحل النهائي أو الخاص :**

$$y(t) = \left[y(0) - \frac{b}{a}\right]e^{-at} + \frac{b}{a}$$

**مثال** : $\frac{dy}{dt}+2y=4$

**لدينا** : b = 4, a = 2

**الحل العام** : $y(t) = Ae^{-2t} + 2$

**الحل الخاص** : عندما :

$$Y(0) = 1$$

$$y(t)=\left[1-\frac{4}{2}\right]e^{-2t}+\frac{4}{2}$$

$$y(t) = -e^{-2t} + 2$$

**الحالة الخاصة** : وهي الحالة التي يكون فيها a = 0 وبالتالي تصبح المعادلة التفاضلية على الصيغة التالية.

**الحل العام** : y (t) = A + b(t)

**الحل النهائي ( الخاص )** : y(t) = y (0) + b(t)

**مثال** : $\frac{dy}{dt}=10$

**الحل العام** : y(t) = A + 10 t

**الحل النهائي** : إذا كان y(0) = 1 هو y (t) = 1 + 10 t

**التمثيل البياني** :

لتمثيل الحل بيانيا نختار بعض الفترات الزمنية t ثم نجد قيم الدالة المناظرة لها في مستوى المحورين الإحداثيين ثم نمثل هذه القيم بيانيا ونوصل بينها حتى نحصل على التمثيل البياني للحل.

**مثال 1** : ليكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية :

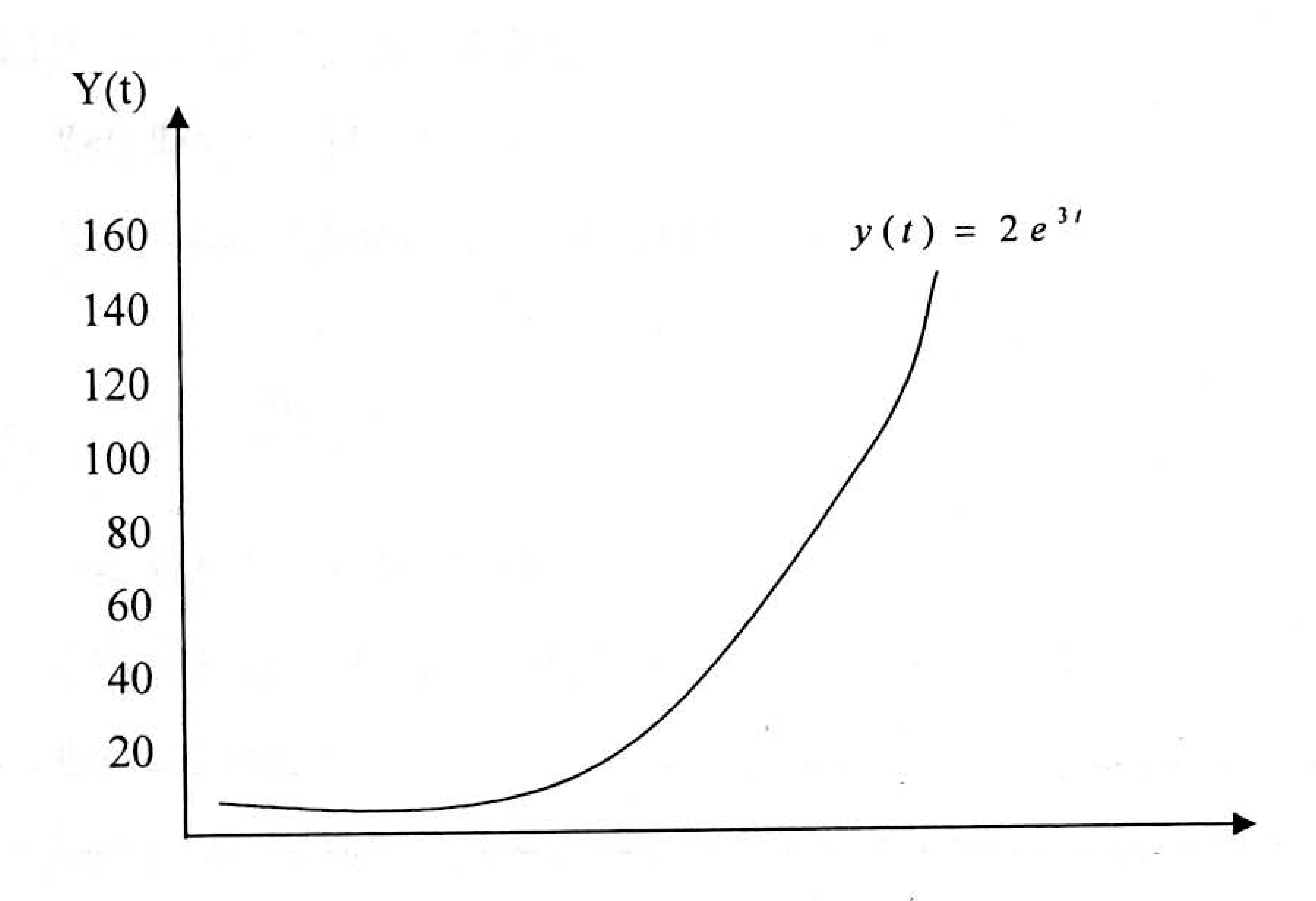
$$\frac{dy}{dt} - 3t = 0$$

**الحل الخاص أو النهائي** : هذه المعادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الأولى.

$$y(t) = y(0)e^{-at}$$

$$y(t) = 2e^{3t}$$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Y (t) | 2 | 40,18 | 807,17 | 16215,49 |




الشكل رقم I. 2

**<u>مثال 2</u>** : لتكن المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dt}+t^3y=4t^3 \quad \text{و} \quad Y(0)=5$$

هذه المعادلة تفاضلية خطية غير متجانسة من الرتبة الأولى وحلها الخاص هو:

لدينا:

$$a=t^3$$

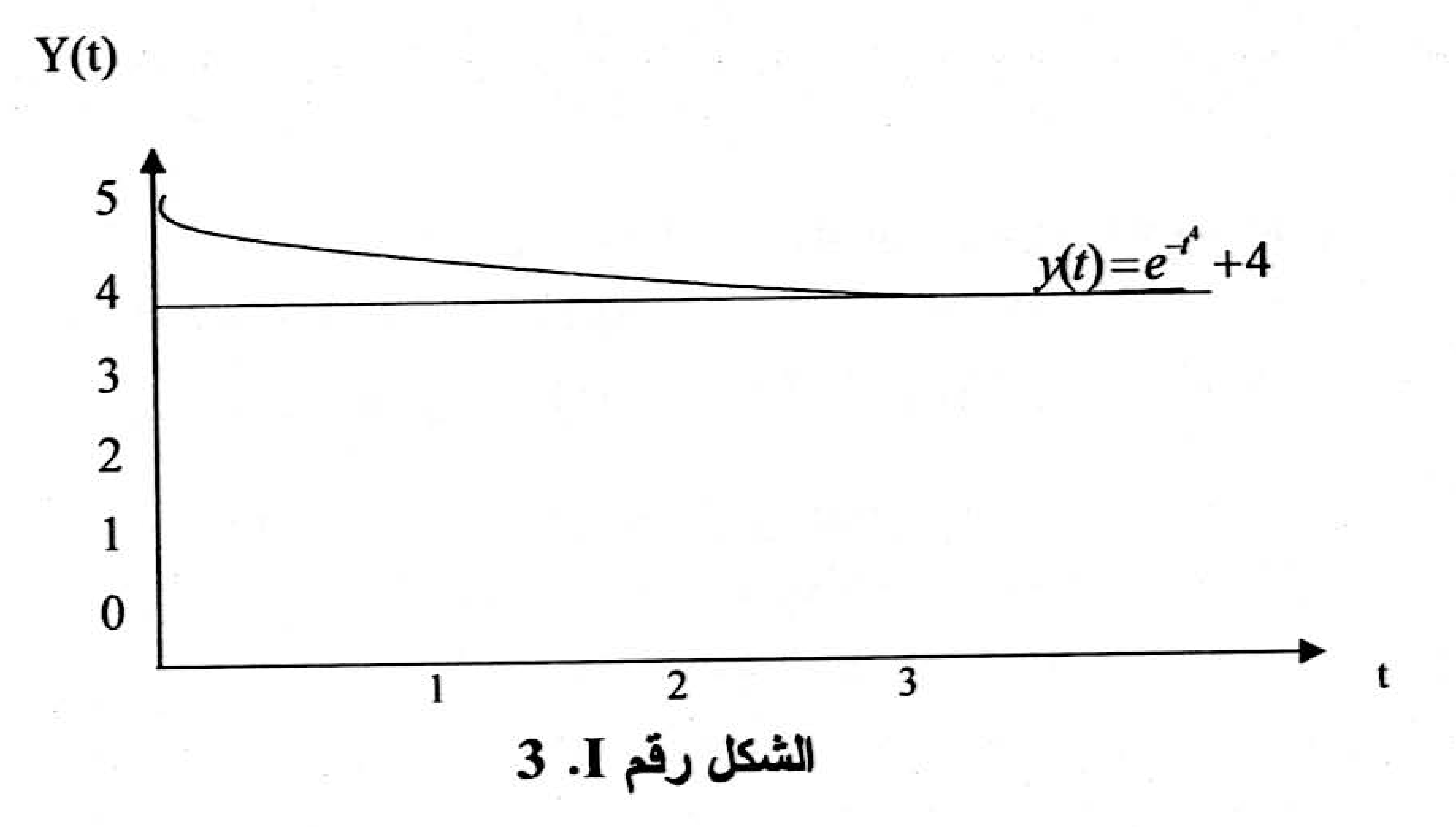
$$b=4t^3\neq 0$$

$$y(t)=\left[y(0)-\frac{b}{a}\right]e^{-at}+\frac{b}{a}$$

$$y(t)=\left[5-\frac{4t^3}{t^3}\right]e^{-t4}+\frac{4t^3}{t^3}$$

$$y(t)=e^{-t4}+4$$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Y (t) | 5 | 4,37 | 4,0000001 | - 4 |




**الشكل رقم I. 3**

**ملاحظة :**

1 ـ عندما تكون $a > 0$ فإن ( t ) Y تـؤول إلـى التـوازن (نمـوذج مستقر).

2 ـ عندما تكون $a < 0$ فإن ( t ) Y تبتعد عن التوازن ( نموذج غيـر مستقر ).

**II ـ معادلات الفروق :**

تعتبر معادلة الفرق عن العلاقة بين المتغير التابع والمتغيـر المسـتقل المتباطئ الذي يتغير بفترات زمنية متقطعة.

**مثال:** اعتبر المتتالية العددية التالية 25، 16، 9، 4، 1 وأرمز لهم بالرمز $Y_1 \quad Y_2 \ldots\ldots Y_t$ فتكون الفروق الأولى هي :

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 3$$
$$\Delta y_2 = y_3 - y_2 = 5$$
$$\Delta y_3 = y_4 - y_3 = 7$$
$$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = 9$$
$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = ?$$

وتسمى $\Delta Y_t$ فرقا من الرتبة الأولى بالنسبة للزمن، ونعرف الفرق للمتغير Yبالنسبة للزمن بالعلاقة الآتية : $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$

وتكون الفروق الثانية : $\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t = \Delta\left(y_{t+1} - y_t\right)$

ونعرفه أنه فرق الفرق من الرتبة الأولى للمتغير Y

$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 2$$
$$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = 2$$
$$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3 = 2$$

وبشكل عام نعرف الفرق من الربتة n ( حيث n عدد صحيح موجب ) للمتغير التابع Y بالنسبة للزمن t بأنه الفرق من الرتبة n - 1 ونرمز له بالرمز

$$\Delta^n y_t = \Delta(\Delta^{n-1} \; y_t)$$

**مثال 1 :**

$y_{t+1} + ay_t = c$ معادلة الفرق من الرتبة الأولى.

$y_{t+1} + ay_t + by_{t-1} = c$ معادلة الفرق من الرتبة الثانية.

$y_{t+n} + ay_{t+n-1} + by_{t+n-2} + ey_t = c$ معادلة الفرق من الرتبة n لأن أصغر دليل فيها هو t و أكبر دليل فيها هو t + n وبالتالي الفرق بين أكبر دليل وأصغر دليل هو n = ( t ) - ( t + n ).

**1 – حل معادلات الفروق من المرتبة الأولى :**

الصورة العامة لمعادلة الفرق من الرتبة الأولى هي :

$$y_{t+1} + ay_t = c$$

**الحل العام** : هو الحل الذي تحتوي على ثابت اعتباطي ويكون الحل العام عندما لا يوجد شرط بدائي.

1 – إذا كانت $a \neq -1$ فإن الحل العام هو

$$y_t = A(-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

2 – إذا كانت $a = -1$ فإن الحل العام هو $y_t = A + Ct$

**الحل الخاص النهائي** : هو الحل الذي يتميز بعدم وجود ثابت اعتباطي وإنما تحدد قيمة لهذا الثابت بشكل يتلاءم مع المسألة المعالجة، وبوجود شرط بدائي معروف.

1 ــ إذا كانت $a \neq -1$ فإن الحل الخاص هو :

$$y(t) = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

2 ــ إذا كانت $a = -1$ فإن الحل الخاص هو : $y_t = y_0 + c_t$

**<u>مثال 1</u>** : حل معادلة الفرق التالية ومثلها بيانيا.

$$y_{t+1} - \frac{1}{2} y_t = 4$$

لدينا:

$$a = -\frac{1}{2} \neq -1$$

الحل العام هو:

$$y_t = A(-a)^t \frac{c}{1+a}$$

$$y_t = A(+\frac{1}{2})^t + \frac{4}{1-\frac{1}{2}}$$

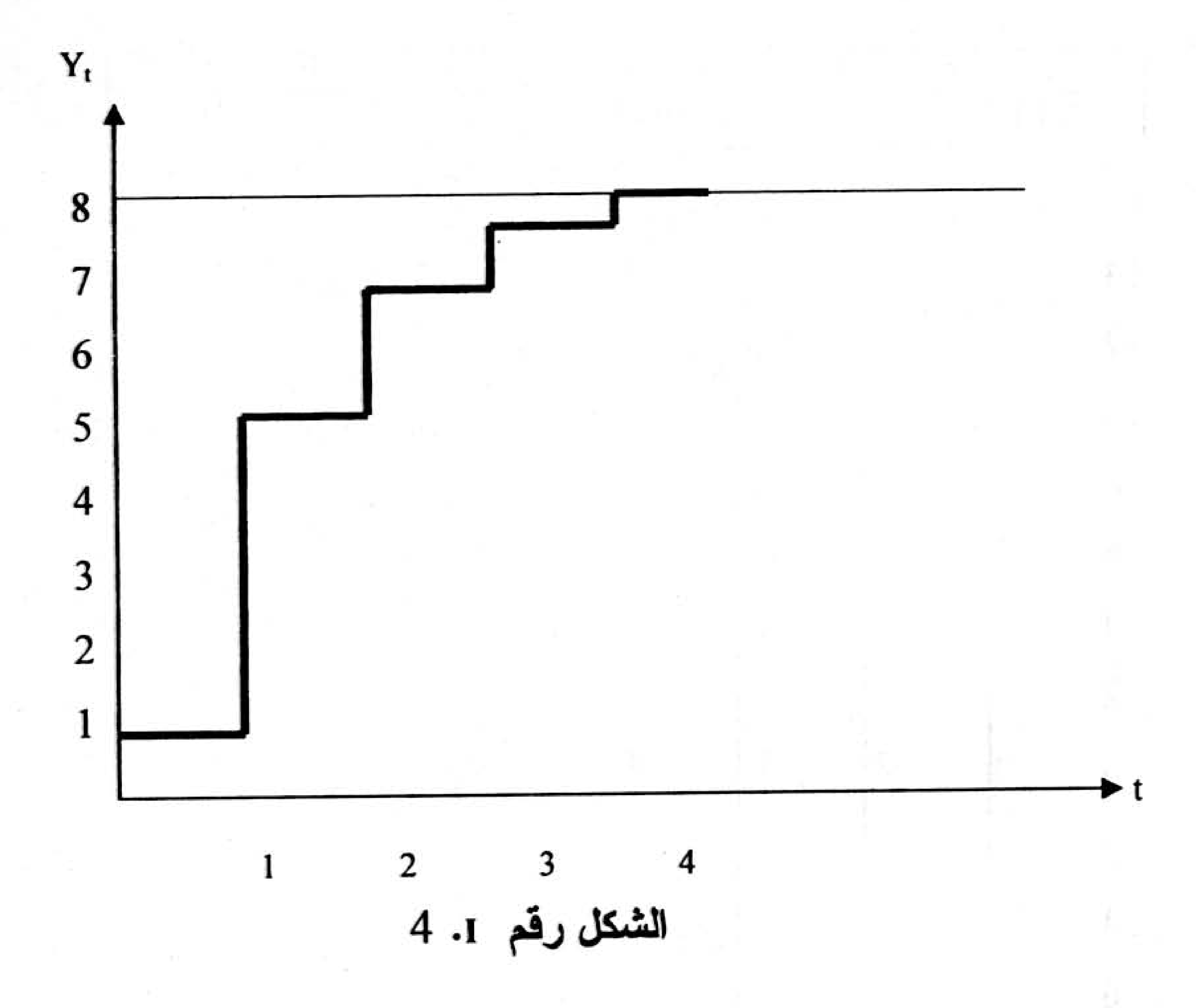
$$y_t = A(\frac{1}{2})^t + 8$$

وإذا كانت $y_0 = 1$ فإن الحل الخاص هو:

$$y^t = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

$$y_t = [1-8](+\frac{1}{2})^t + 8 = -7(\frac{1}{2})^t + 8$$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Y (t) | 1 | 4,5 | 6,25 | 7,15 | 7,973 |




الشكل رقم I. 4

**مثال 2** : حل معادلة الفرق التالية إذا علمت أن :

$$y_0 = 1$$

$$y_{t+1} + 3y_t = 2$$

لدينا : $y_0 = 1, a \neq -1$

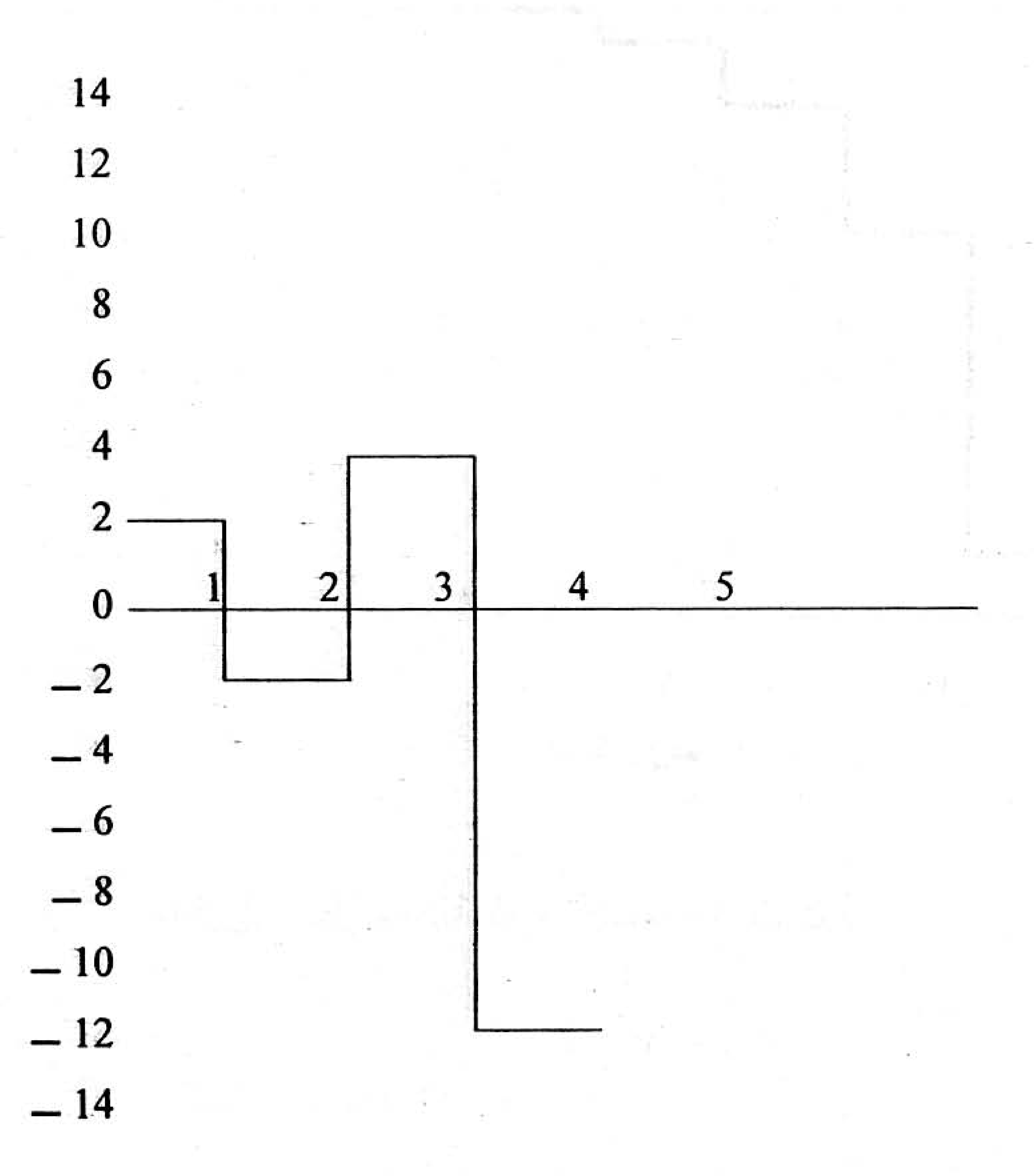
إذن للمعادلة حل خاص هو:

$$y_t = \left[y_0 - \frac{c}{1+a}\right](-a)^t + \frac{c}{1+a}$$

$$y_t = \left[1 - \frac{2}{1+3}\right](-3)^t + \frac{2}{1+3}$$

$$y_t = +\frac{1}{2}(-3)^t + \frac{1}{2}$$

| t | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Y (t) | 1 | - 1 | 5 | - 13 |




**الشكل رقم I. 5**

**ملاحظة :**

ــ إذا كانت $|a|<1$ فإن $y_t$ تقترب من التوازن.

ــ إذا كان $|a|=1$ فإن $y_t$ تتذبذب من موجب إلى سالب.

ــ إذا كانت $|a|>1$ فإن $y_t$ تبتعد عن التوازن.

**المراجع**


1 ـ هوارد أنتون: الجبر الخطي المبسط، الطبعة الثانية، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1982.

2 ـ ج. شيلوف، تعريب أبو بكر خالد سعد الله، التحليل الرياضي، التوابع ذات متغير واحد، الجزء الثاني، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1983.

3 ـ جيمس. م. هندرسون، ترجمة متوكل عباس مهلهل، نظرية اقتصاديات الوحدة بأسلوب رياضي، دار ماكجر وهيل للنشر، صدر بالتعاون بين المكتبة الأكاديمية بالقاهرة ABC ودار المريخ للنشر بالمملكة العربية السعودية 1983.

4 ـ هناء خير الدين، الاقتصاد الرياضي، القاهرة، الهيئة العامة للكتب والأجهزة العلمية، 1971.

5 ـ عمر صخري، مبادئ الاقتصاد الرياضي، الجزائر، ، ديوان المطبوعات الجامعية 1985.

6 ـ علي عزيز علي وعبد الرزاق علي الحسوان، الرياضيات، الطبعة الأولى، الموصل، دار الكتب للطباعة والنشر، 1980.

7 ـ بيار غريز فار، الحساب التفاضلي والمعادلات التفاضلية، الجزائر، ، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

8 ـ علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، الجزائر، ، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

9 ـ شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، الجزائر، ، ديوان المطبوعات الجامعية 1990.

# الباب الثاني

# نظرية الطلب والعرض

**تمهيد:**

عند التحليل الجزئي لسوق السلع كوحدة اقتصادية يـــتم فيهـــا تحديـــد السعر والكمية. وتقدم نظرية الطلب والعرض نموذجا يفسر لنا ما هو مشاهد في الحياة الواقعية من تكون السعر وتغيره معتمدة على تلاقي وتفاعل قـــوى الطلب والعرض، حيث يمثل الطلب طلب المستهلكين على الســـلع، ويمثـــل العرض عرض المؤسسات الإنتاجية لهذه السلع، ويمثل سعر السلعة المحـــدد في سوقها سعر التوازن. كما تفترض هذه النظرية توافر شـــروط المنافســـة التامة في هذه السوق، وهذه الشروط هي:

أ) تجانس السلعة المنتجة.

ب) تعدد المنتجين حيث خروج أو دخول منتج إلى السوق لا يؤثر في السعر.

ج) تعدد المستهلكين حيث خروج أو دخول مستهلك إلـــى الســـوق لا يؤثر في السعر.

د) توافر المعرفة التامة بأحوال السوق وخاصة السعر السائد.

إذن تحدد نظرية الطلب والعرض الموضوعات الثلاثة للنظرية وهـــي الطلب، العرض، التوازن.

وسنتناول في هذا الملف الفصول التالية:

1 ــ الطلب.

2 ــ العرض.

3 ــ التوازن.

4 ــ تطبيقات على التوازن.

# الفصل الأول

# الــطـــلـــب

# الطلب

**I ـــ الطلب**: هو الكمية التي يكون المشترون على استعداد لشرائها عند سعر معين وفي فترة زمنية معينة.

يتبين من التعريف السابق ما يلي :

1 ـــ يشير الطلب إلى الطلب الكلي المتكون من مجموع الطلبات الفردية لأن دراسة التبادل تأخذ بعين الإعتبار طلب السوق.

2 ـــ يفهم من التعريف وجود رغبة مصحوبة بالقوة الشرائية، لأنه لا تؤدي مجرد الرغبة في سلعة إلى شرائها إلا إذا كانت مصحوبة بالقدرة على الشراء.

3 ـــ ترتبط الكمية المطلوبة بمجموعة من المتغيرات من بينها: السعر، الدخل، الزمن، أذواق المستهلكين، عدد المستهلكين، الدعاية، القرارات المتعلقة بالسلع الأخرى المنافسة أو المكملة لهذه الثروة...إلخ.

إذن نلاحظ أن دالة الطلب معقدة وهي تابع لمجموعة من المتغيرات تدعى بمحددات الطلب.

$$Q_D = f(\mathrm{P_A}, P_B, P_C ............ R, T$$

ولدارسة أثر هذه العوامل على الكمية المطلوبة نقوم بدراسة أثر عامل واحد فقط في الكمية المطلوبة مع افتراض ثبات باقي العوامل ثم أثر عامل آخر، ثم التعميم، وهكذا مما يسمى بعملية تجريد النظرية العلمية.

**1 ـــ قانون الطلب** : إذا فرضنا ثبات العوامل المؤثرة في الطلب بإستثناء سعر السلعة المدروسة نجد علاقة عكسية بين السعر والكمية المطلوبة وتسمى هذه العلاقة قانون الطلب، فكلما ارتفع السعر تنخفض الكمية المطلوبة وهذا ما يطلق عليه لفظ انكماش الطلب وبالعكس إذا انخفض السعر

ترتفع الكمية المطلوبة ويطلق على ذلك تمدد الطلب. كما يطلق الإقتصاديون على أثر السعر في الكمية المطلوبة عبارة " تغير الطلب "، ونستطيع كتابة طلب المستهلك في حالة اعتماد سعر السلعة المطلوبة فقط في الصورة التالية.

$$Q_{Di} = f_i(P_A)$$

حيث : $I = 1,2 \ldots\ldots\ldots\ldots n$

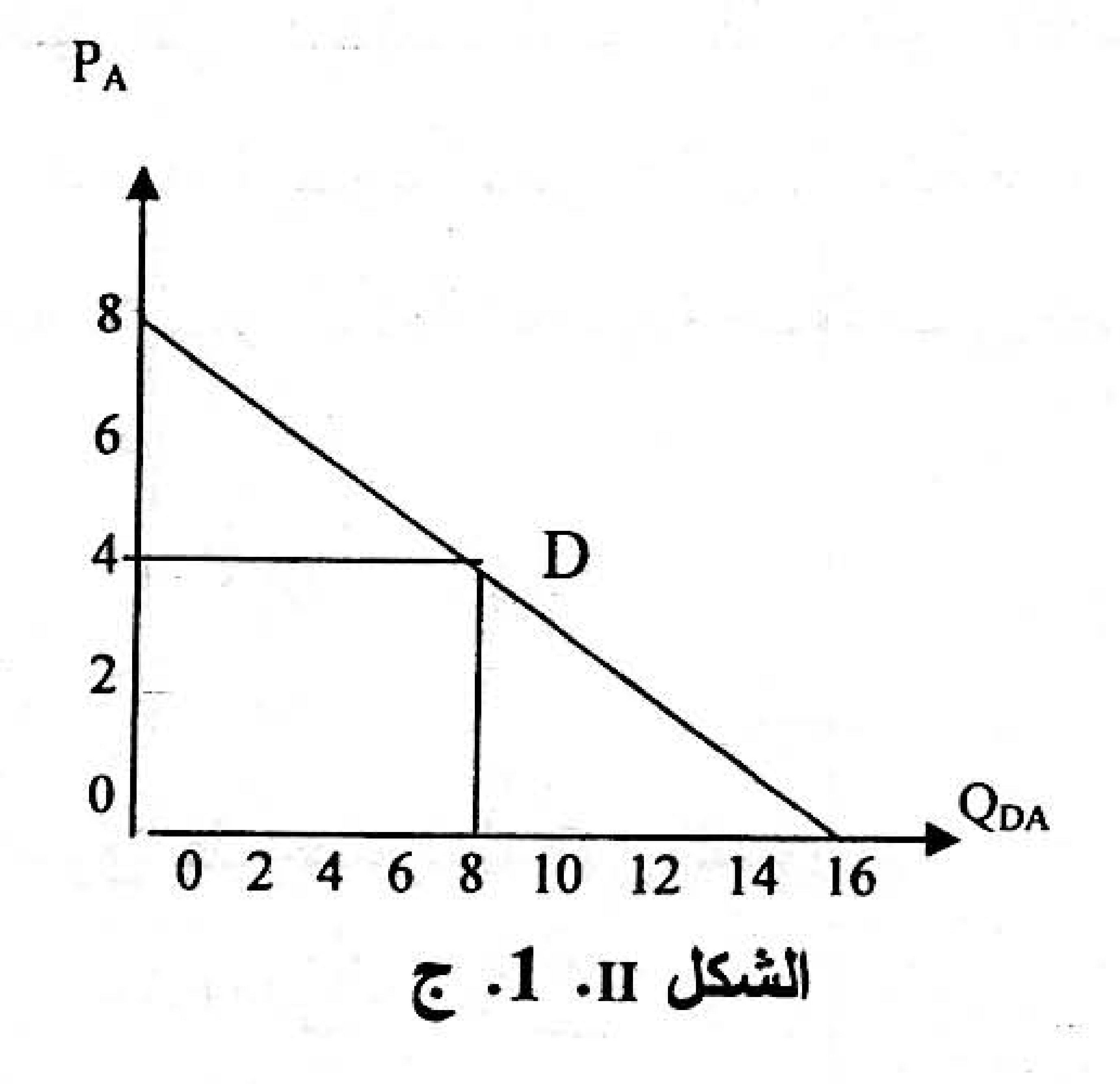
وكذلك كتابة طلب السوق على هذه السلعة في الصورة:

$$Q_D = \sum_{i=1}^{n} Q_{Di} = \sum_{i=1}^{n} f_i(P_A) = f(P_A)$$

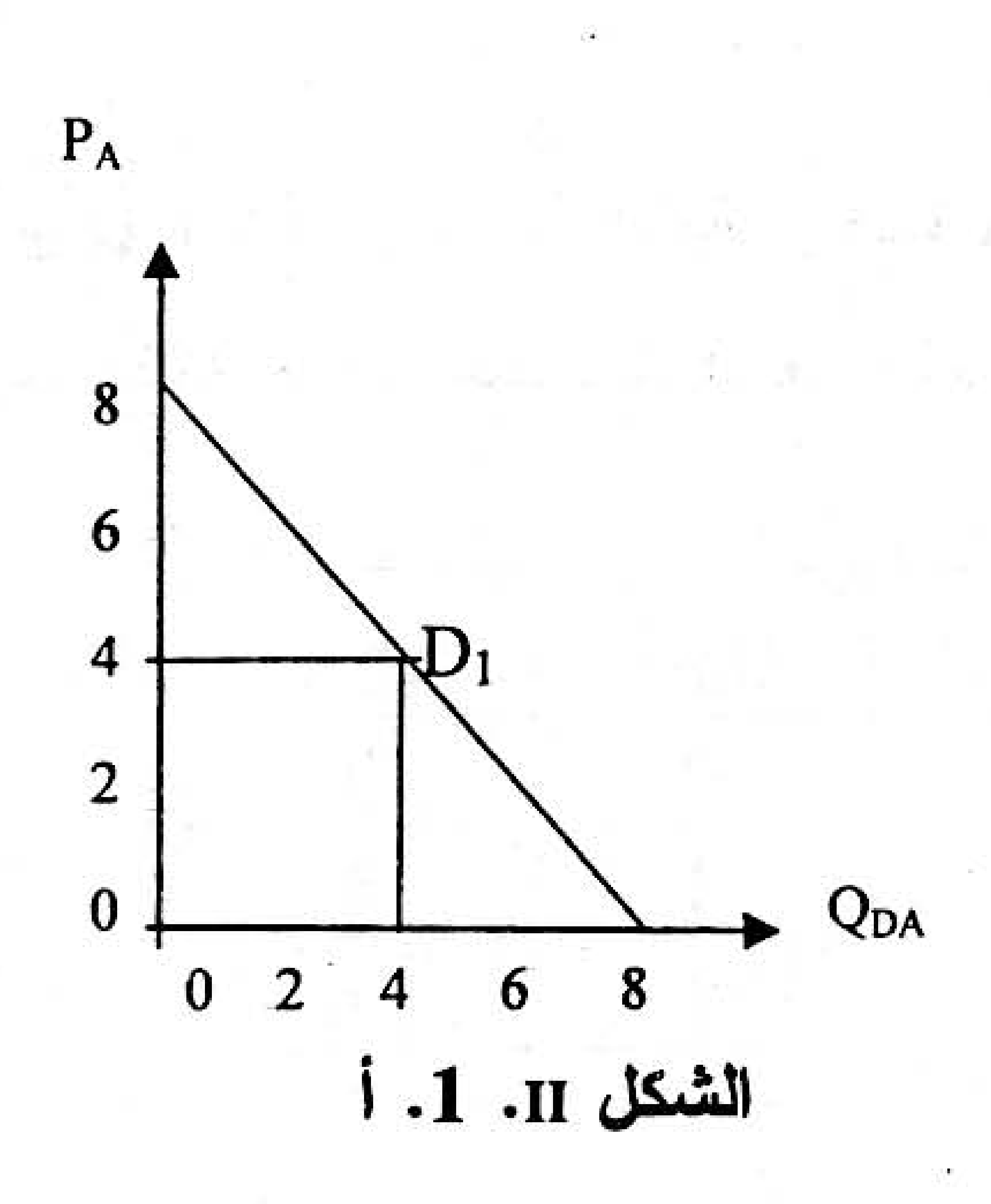
وحيث تمثل n عدد الطلبات الفردية PA سعر السلعة .A

**<u>مثال 1</u>** : ليكن لدينا السلعة الوحيدة A ومستهلكان يطلبان هذه السلعة بكميات مختلفة حسب مستويات السعر المختلفة PA.

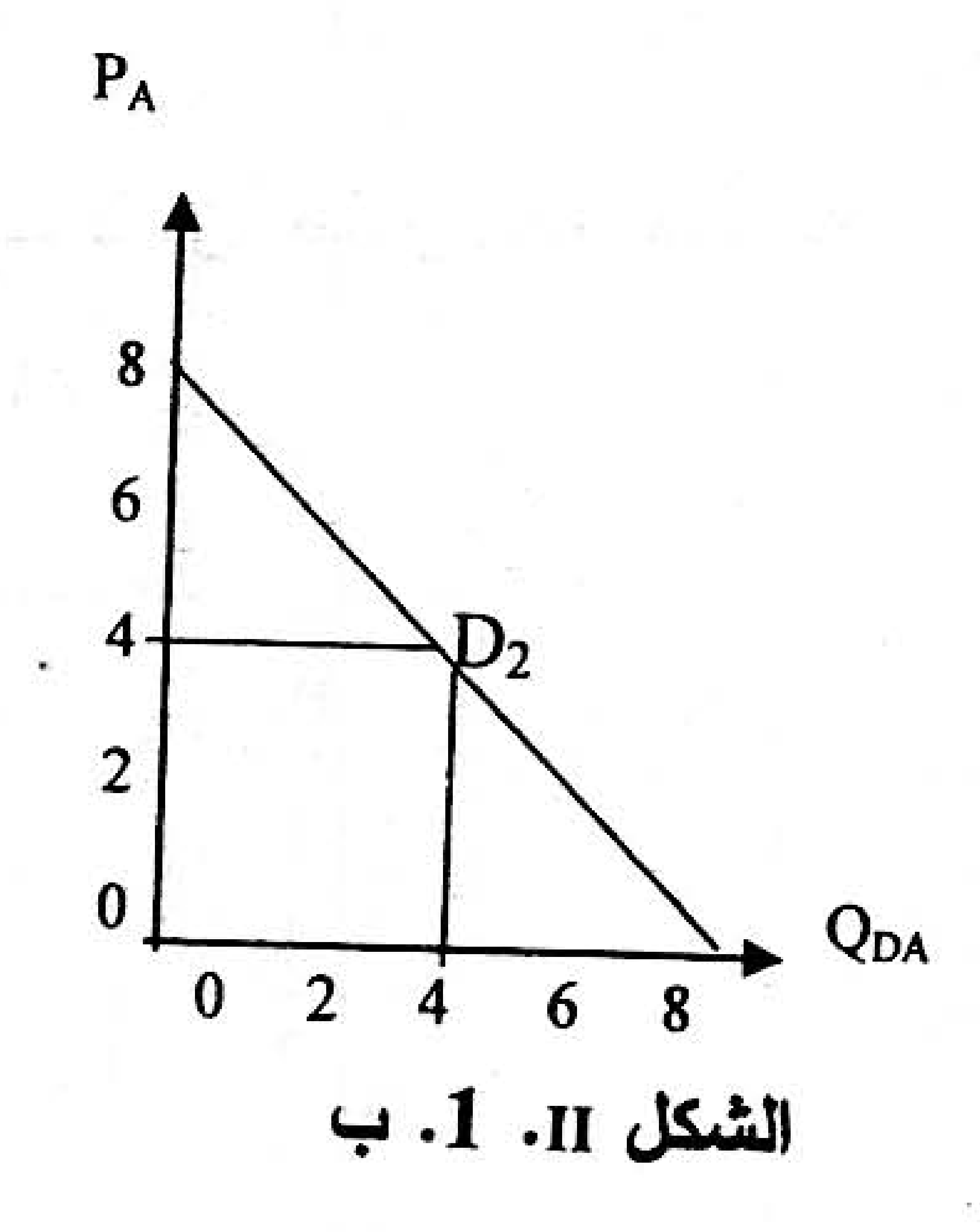
| $P_A$ | $Q_{D1\,A}$ | $Q_{D2\,A}$ | $Q_{D\,A}$ |
|---|---|---|---|
| 8 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 4 | 4 | 8 |
| 0 | 8 | 8 | 16 |




الشكل II. 1. ج




الشكل II. 1. أ




الشكل II. 1. ب

– يبين الجدول السابق مستويات السعر المختلفة ومستويات الكمية المطلوبة عند هذه الأسعار بالنسبة للمستهلكين ثم طلب السوق بالنسبة لمستويات السعر المختلفة.

لرسم منحنى الطلب الذي يمثل المحل الهندسي لجميع الثنائيات الممكنة ( QDA ، PA ) حسب مستويات السعر المختلفة، نرسم محورين متعامدين متجانسين في المستوى ثم نمثل الثنائيات ( QDA ، PA ) ثم نوصل بين هذه النقط فنحصل على منحنى الطلب. ونلاحظ أننا مثلنا مستويات السعر المختلفة على المحور الرأسي ومستويات الكمية المطلوبة على المحور الأفقي مثل ما درج عليه الإقتصاديون مع أن المتغير المستقل هو السعر والمتغير التابع هو الكمية والسبب في ذلك غالبا ما يفترض لدالة الطلب معكوس وهو $PA = f^{-1}(Q_D)$ وهو نفسه دالة حيث أن:

$$f\left[f^{-1}(Q_D) = Q_D\right]$$

إن الشكل II. 1. أ يبين منحنى طلب الفرد وكذلك الشكل ( II. 1. ب )، أما ( الشكل II. 1، جـ ) يبين طلب السوق الذي يمثل مجموع الطلبات الفردية.

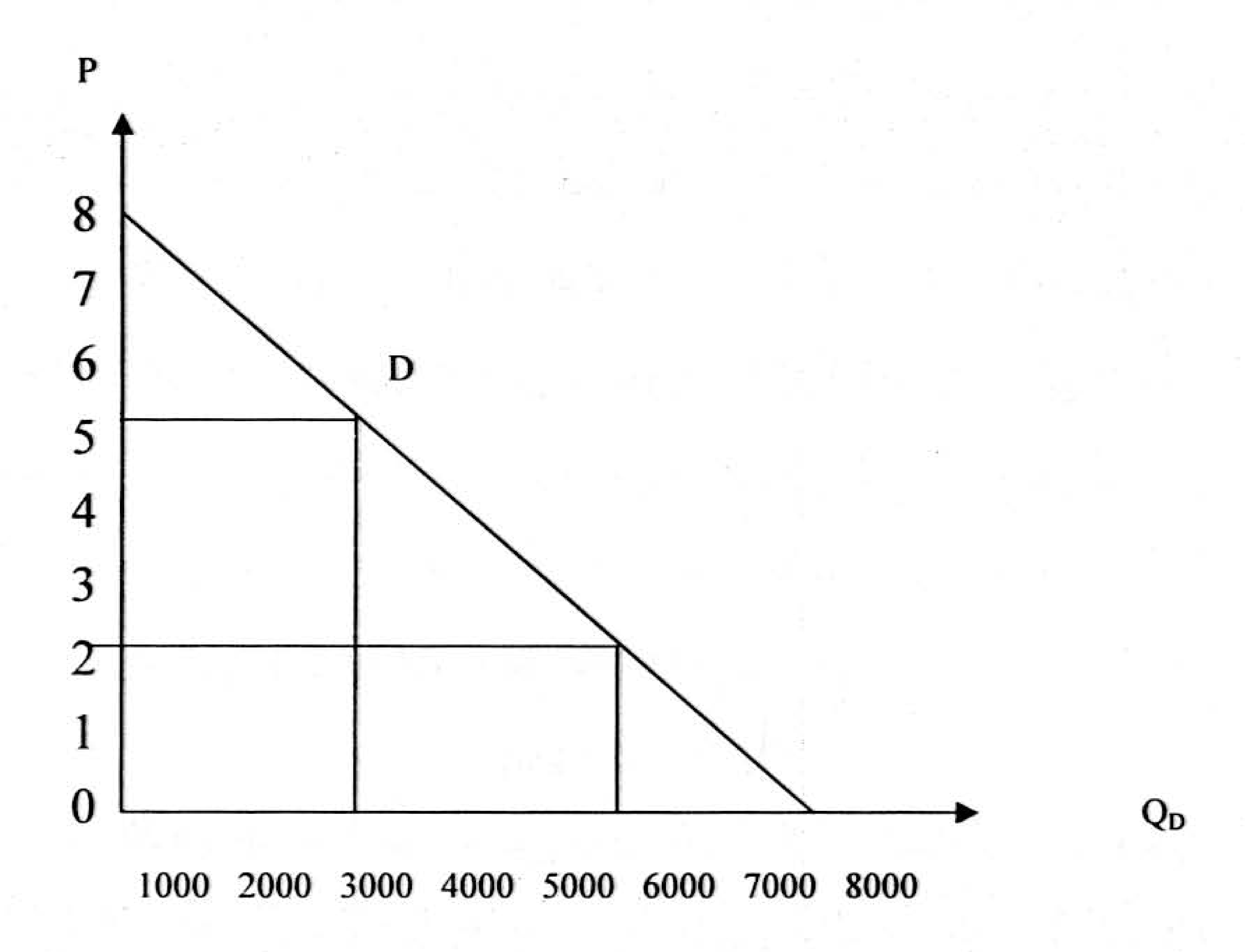
**<u>مثال 2</u>** : في سوق سلعة ما 1000 مستهلك، فإذا كانت دالة الطلب الفردي هي: $Q_{Di} = 8 - p$ وأخذ السعر المستويات التالية متبعا العد التنازلي: 7,8، 5,6 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0.

حدد دالة طلب السوق والكميات المطلوبة ثم أرسمها.

دالة طلب السوق $Q_D = 1000Q_{Di} = 1000(8 - p) = 8000 - 1000p$

الكميات المطلوبة حسب مستويات السعر المختلفة.

| P | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | / |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Q | 8000 | 7000 | 6000 | 5000 | 4000 | 3000 | 2000 | 1000 | 0 | / |




(على المحور الأفقي اعتبرنا وحدة القياس تساوي 1000 وحدة من السلعة المطلوبة).

**( الشكل II، 2 )**

نلاحظ في الشكل ( الشكل II، 2 ) أنه كلما انخفض السعر تتمدد الكمية المطلوبة. ومن ما ذكرناه سابقا نخرج ببعض الخصائص لمنحنى الطلب.

1 ــ أن الطلب تابع للسعر ومنه فإن طلب أي سلعة من السلع هو دالة ذات قيمة منفردة بدلالة السعر.

2 ــ إن منحنى الطلب بإكماله هو التعبير الهندسي عن دالة الطلب.

3 ــ إن ميل منحنى الطلب سالب، أي أن منحنى الطلب ينحدر إلى الأسفل.

4 ــ إن منحنى الطلب هو مفهوم للحد الأقصى، فهذا المنحنى يمثل من جهة الحد الأقصى للكميات التي يكون المستهلك مستعد لأن يشتريها من السلعة عند أسعار مختلفة، ويمثل من جهة أخرى الحد الأقصى للسعر الذي يمكن أن يدفعه المستهلك في السلعة وذلك في مقابل كميات مختلفة يشتريها منها.

5 ــ إن تصوير منحنى الطلب في شكل خطي يعني أنه يمكن للمستهلك أن يطلب كمية واحدة فقط عند سعر معين ولا يمكنه أن يطلب كمية أكبر أو أقل عند نفس السعر، حيث يفترض أن المستهلك رشيد يخضع سلوكه لأحكام العقل المجرد وبالتالي يمكنه تحديد الكمية التي يطلبها عند كل سعر بدقة وهذا بخلاف الواقع حيث في الحياة الواقعية يخضع المستهلك إلى المحيط الاجتماعي والثقافي وبالتالي منحنى الطلب لن يكون بالضرورة في شكل خطي.

**2 ــ تفسير دالة الطلب**: ونعني بذلك تفسير قانون الطلب والذي هو عبارة عن علاقة عكسية بين الكمية والسعر أي معرفة لماذا ينحدر الطلب إلى الأسفل ؟

لانحدار منحنى الطلب إلى أسفل سببان هما : أثر الإحلال وأثر الدخل.

**2. 1 ـ أثر الإحلال:**

عندما ينخفض سعر سلعة معينة وأسعار السلع المنافسة لهـا ثابتـة، تستطيع السلعة محل البحث أن تنافس السلع الأخرى المنافسة لهـا فيرتفـع الطلب عليها ( يتمدد ). وعندما يرتفع سعرها مع ثبات أسعار السلع الأخرى المنافسة لها فينكمش الطلب عليها في حين تحل محلها السلع المنافسة لها.

**2.2 ـ أثر الدخل :**

إن انخفاض سعر سلعة ما يؤدي إلى زيادة القدرة الشرائية للمسـتهلك وبالتالي يزيد من شراءه للسلع من بينها السلعة محل البحث.

وإذا ارتفع سعر سلعة ما يؤدي إلى انخفاض القدرة الشرائية للمستهلك لأن الدخل الحقيقي انخفض ولو كان الدخل الأسمى ثابتا وبالتالي يقل الطلب على السلع ومن بينها السلعة محل البحث وهذا كله يتم مع افتـراض ثبـات جميع محددات الطلب باستثناء سعر السلعة المدروسة.

إن أثر الإحلال وأثر الدخل هما السببان في انحدار منحنى طلب الفرد وطلب السوق إلى أسفل. كما يوجد سبب آخر في انحدار طلب السوق إلـى أسفل وهو: أن انخفاض سعر السلعة يؤدي إلى تمدد طلـب فئـة الـدخول المحدودة التي كانت تعجز على شراء هذه السلعة وكذلك تمـدد طلـب فئـة أخرى كانت تعطي أهمية ضئيلة لهذه السلعة. والعكس صحيح.

**3 ـ استثناءات قانون الطلب:**

إن التعريف السابق للطلب يركز على علاقة معينة بين السعر والكمية المطلوبة مع افتراض محددات الطلب الأخرى ثابتة. هذه العلاقة هي علاقـة عكسية حيث يؤدي انخفاض السعر إلى تمدد الكميات المطلوبة ويؤدي ارتفاع

السعر إلى انكماش الكميات المطلوبة إلا أنه توجد في الحياة الواقعية استثناءات حيث يؤدي ارتفاع السعر إلى تمدد الكميات المطلوبة ويؤدي انخفاض السعر إلى انكماش الكميات المطلوبة ومن هذه الإستثناءات:

1 ـ توقع النقص أو الزيادة في عرض السلعة مثلا: إذا توقع المستهلكون نقص في عرض السلعة فيزيدون في طلبهم مما يؤدي إلى ارتفاع السعر يصاحبه تمدد في الكميات المطلوبة والعكس صحيح.

2 ـ توقع انخفاض أو ارتفاع سعر السلعة: قد ينخفض السعر ويؤدي هذا الانخفاض إلى الأحجام عن الشراء نتيجة توقع المستهلكين لانخفاض مستمر في السعر مما يكسبهم فائض أكبر في المستقبل والعكس صحيح.

3 ـ يرغب بعض الأفراد في شراء السلعة لأن سعرها مرتفع لإظهار مركزهم كأغنياء في وسط المجتمع مثل ظاهرة طلب السيارات الفاخرة والمجوهرات الثمينة، وقد تمدد فئة في طلبها للسلعة المرتفع سعرها اعتقادا منها أنها ذات جودة عالية.

4 ـ الاستثناء: هذا يتعلق بما يسمى بلغز جيفن حيث يؤدي ارتفاع سعر سلعة أساسية كالخبز إلى تمدد الكميات المطلوبة منها، حيث يؤدي ارتفاع سعر الخبز إلى تدهور القدرة الشرائية للعائلات الفقيرة ويدفعها هذا التدهور إلى إنقاص استهلاكها من المواد الغذائية الأخرى مثل اللحوم وتزيد من استهلاكها للخبز.

وإذا انخفض سعر الخبز ترتفع القدرة الشرائية لهذه العائلات مما يدفعها إلى إنقاص طلبها من الخبز وزيادة طلبها على المواد الغذائية الأخرى التي كانت محرومة منها بسبب غلاء أسعارها.

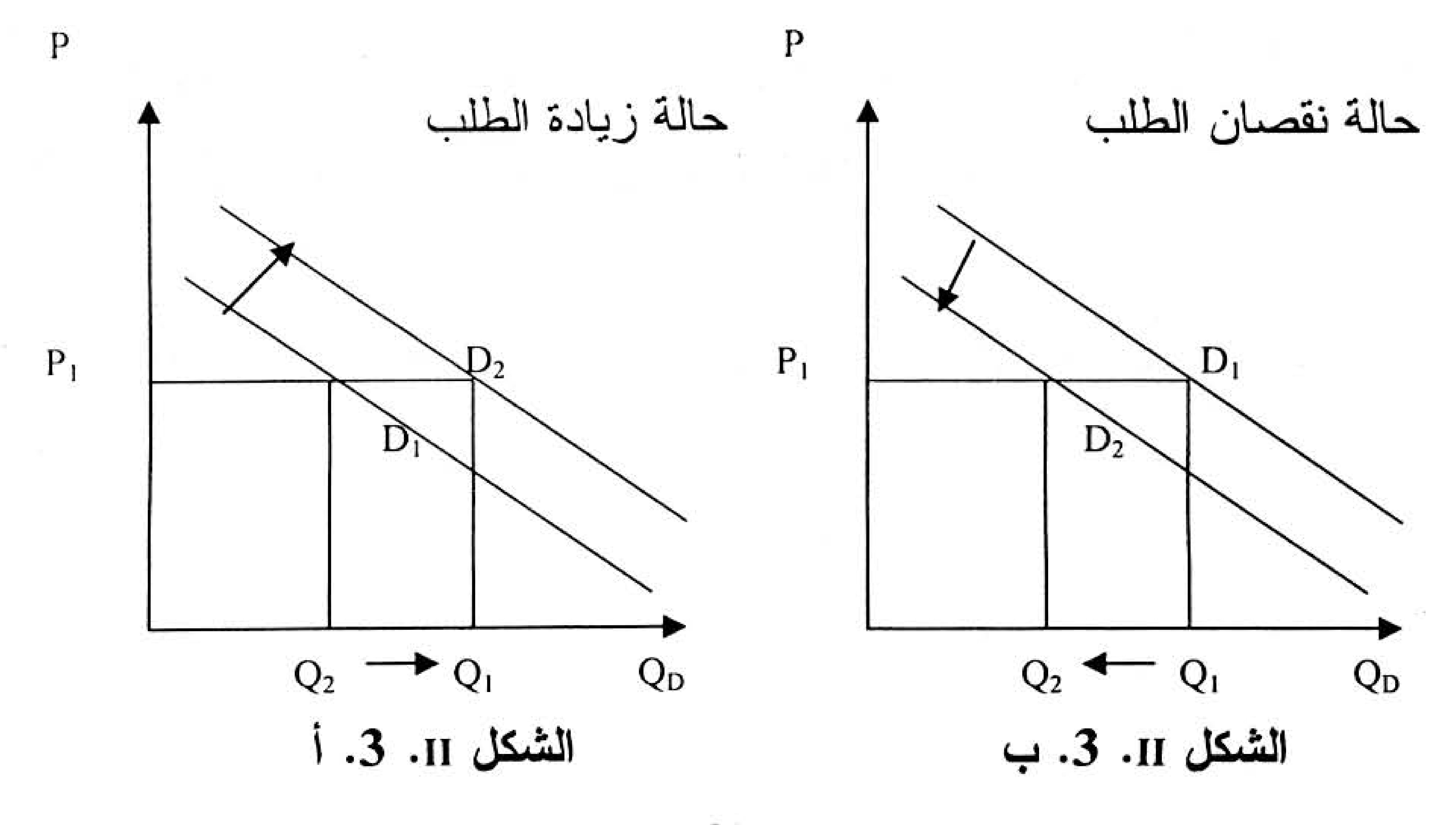
### 4 ـ العوامل التي تؤثر في الطلب بخلاف السعر ( ظروف الطلب ):

توجد مجموعة من العوامل تؤثر في الكمية المطلوبة بخلاف السعر. وتنقسم هذه المجموعة من العوامل إلى عوامل كمية وأخرى نوعية. ومن هذه العوامل باقي المحددات المذكورة سابقا كالدخل وأذواق المستهلكين وعدد المستهلكين وأسعار السلع المنافسة والسلع المكملة...إلخ.

فإذا ثبتنا سعر السلعة محل البحث فإن أي تغير في باقي المحددات يؤدي إلى تغير في الكمية المطلوبة إما بالزيادة أو بالنقصان.

ويطلق الإقتصاديون على التغير في الكميات المطلوبة بسبب العوامل الأخرى بخلاف السعر لفظ زيادة الطلب ويعني زيادة الكميات المطلوبة مع عدم تغير السعر ( الشكل II. 3. أ ). ويطلق لفظ نقصان الطلب: ويعني هذا اللفظ نقصان الكميات المطلوبة عند نفس السعر ( الشكل II. 3. ب ) ويطلق لفظ نقصان الطلب: ويعني هذا اللفظ نقصان الكميات المطلوبة عند نفس السعر ( الشكل II. 3. ب ).

ويطلق على تغير الطلب عند نفس السعر عبارة تغير حالة الطلب.




الشكل II. 3. أ

الشكل II. 3. ب

إذا بقيت محددات الطلب بخلاف السعر ثابتة فإن منحنى الطلب يبقى ثابت وما إن تتغير هذه المحددات حتى يبدأ شكل الطلب بالتغير وفقا للتغيرات التي دخلت على محدداته فينزاح المنحنى يمنة أو يسرة حسب نوعية التغير الطارئ. ويمكننا أن نجمل التغير الذي نجم عن كل محدد فيما يلي :

1 ـ <u>أذواق المستهلكين ورغباتهم</u>: إذا كان التغير في أذواق المستهلكين ورغباتهم لصالح البضاعة فإن هذا يعني زيادة الطلب عند نفس السعر. أما إذا كان التغير في أذواق المستهلكين ورغباتهم في غير صالح البضاعة فإن ذلك يعني نقصان الطلب. والجدير بالذكر أن أذواق المستهلكين ورغباتهم تتأثر بالعامل الثقافي والإجتماعي وكذلك نشاط الإعلان والدعاية.

2 ـ <u>تطور عدد المستهلكين</u>: إذا كان أكثر من مستهلك فإن طلب السوق هو مجموع طلبات الأفراد أو جُداء متوسط الطلب الفردي وعدد المستهلكين في المجتمع، وبالتالي فزيادة عدد المستهلكين يؤدي إلى زيادة الطلب ونقصانه يؤدي إلى نقصان الطلب.

3 ـ <u>توقعات المستهلكين</u>: عندما يتوقع المستهلكون فقدان سلعة من السوق أو ارتفاع سعرها لسبب من الأسباب فإن ذلك التوقع يدفعهم إلى زيادة الطلب عليها والعكس صحيح.

4 ـ <u>تغير دخول المستهلكين</u>: إن تغيير دخول المستهلكين بالزيادة يؤدي إلى زيادة الطلب أما تغيره بالنقصان يؤدي إلى نقصان الطلب.

وقد جرى الإقتصاديون إلى تقسيم البضائع من حيث تغير الطلب عليها عندما يتغير الدخل إلى نوعين:

أ ـ <u>البضائع الطبيعية</u>: وهي التي يكون معها أثر الدخل موجبا، أي إذا زاد الدخل زاد الطلب والعكس صحيح.

ب ـ **البضائع الدنيا**: وهي التي يكون معها أثر الدخل سالبا، فإذا زاد الدخل عن حد معين تناقص الطلب عليها أو تحول عنها إلى بضائع أفضل.

5 ـ **أسعار البضائع المنافسة أو المتكاملة**: تنقسم البضائع من حيث تأثر طلبها بحركة الأسعار إلى ثلاثة أنواع:

أ ـ **بضائع متنافسة**: أي يمكن لواحدة منها أن تحل محل مكان الأخرى إذا ارتفع سعرها، أما مقدار التغير فيرجع إلى درجة الإحلال الممكنة بينهما مثال ذلك الشاي والقهوة.

ب ـ **بضائع متكاملة** : وهي البضائع التي يتوافق الطلب عليها زيادة أو نقصان مثل السيارات والبنزين.

ج ـ **بضائع مستقلة** : وهي البضائع التي لا توجد أي علاقة بين تغير أسعارها والطلب عليها مثل الشاي والسيارات.

## II ـ المرونة:

هي لفظ مستعار من الرياضيات والميكانيك، ويعود الفضل في تطبيق مفهوم المرونة في الإقتصاد إلى الإقتصادي " تيرغو " 1966.

تستند فكرة المرونة الرياضية إلى أنها مقياس للعلاقة بين التغيرات النسبية التي تطرأ على ظاهرة ما نتيجة التغيرات النسبية في ظاهرة أخرى.

**مثال** : نعلق جسم كتلته m في نهاية نابض فيعطى طولا معينا L إذا أضفنا إضافة قدرها $\Delta m$ فإن النابض يتمدد بزيادة قدرها $\Delta L$.

إن العلاقة $\frac{\Delta L}{\Delta m}$ تعني المقارنة بين التغيرات التي تطرأ على طول النابض والتغيرات التي تطرأ على الوزن المعلق بالنابض، في حين العلاقة

$\frac{\Delta L}{L} \Big/ \frac{\Delta m}{m}$ تعني المقارنة بين التغيرات النسبية للطول والتغيرات النسبية للوزن.

المرونة = % لزيادة الطول / % لزيادة الوزن

أما في المجال الإقتصادي يقصد بالمرونة أي ظاهرة إقتصادية درجة استجابة هذه الظاهرة للتغير النسبي في عامل معين يؤثر عليها.

**<u>1 ـ مرونة الطلب</u>** : تمثل مدى استجابة الطلب للتغير النسبي في عامل يؤثر على الطلب.

**<u>1 .1 ـ مرونة سعر الطلب</u>** : هي درجة استجابة الطلب للتغير النسبي الحاصل في السعر.

$$E_p = + \frac{\Delta Q}{\Delta p} . \frac{P}{Q}$$

وباستعمال المشتق $\frac{dQ}{dp}$ كتقريب $\frac{\Delta Q}{\Delta p}$ فإن:

$$E_p = \frac{dQ}{dp} . \frac{P}{Q}$$

<u>**مثال**</u>: إذا كانت دالة الطلب Q = 150 - 12 P أحسب مرونة سعر الطلب عندما P = 5.

$$E_p = \frac{dQ}{dp}\frac{P}{Q} = -12(\frac{5}{150-125}) = -\frac{60}{90}$$

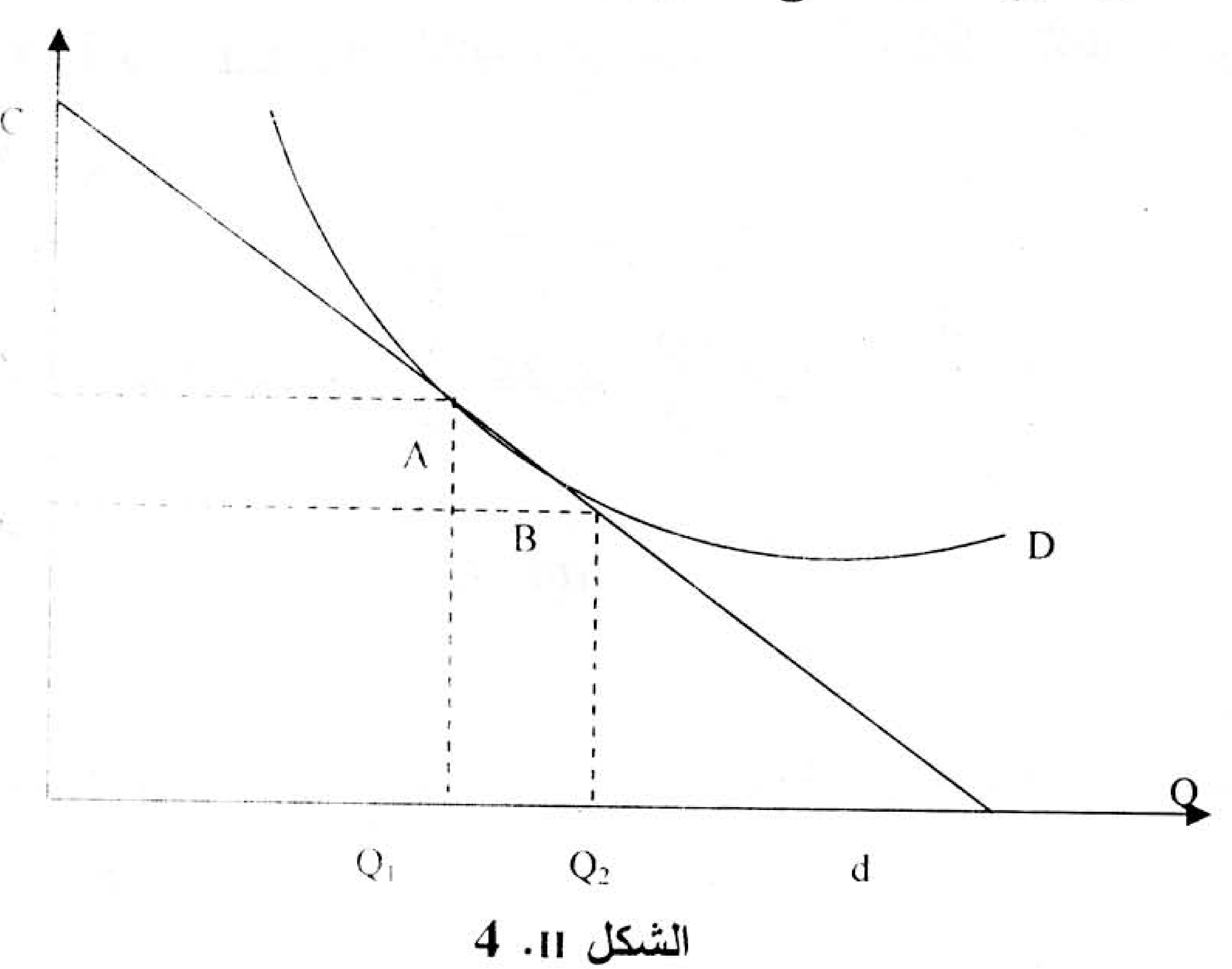
$$E_p = -0,66$$

نلاحظ أن مرونة سعر الطلب سالبة لأن السعر يـؤثر علـى الطلـب تأثيرا عكسيا. إذن الإشارة السالبة تبين العلاقة العكسية بين السعر والكميـة. ولمعرفة درجة استجابة الكمية للسعر ننظر إلى المرونة بالقيمة المطلقة.

فإذا كانت $(E_p \rangle 1)$ فإن الطلب مرن، وإذا كانت $(E_p \langle 1)$ فإن الطلب غير مرن وإذا كانت $(E_p = 1)$ يعتبر الطلب تام المرونة (متكافئ المرونة).

من التعريف السابق لمرونة سعر الطلب تظهـر فكرتـان مختلفتـان للمرونة.

**<u>أولا : مرونة القوس</u>** : وهي مقياس لمتوسط درجة اسـتجابة الكميـة المطلوبة لتغير السعر والتي يظهرها منحنى الطلب على طول جزء محـدود منه مثل الجزء AB على الشكل II. 4.




**الشكل II. 4**

عندما ننظر إلى الشكل II. 4 وإلى المعادلة التي تعرف مرونة سعر الطلب $E_p = \dfrac{\Delta Q}{\Delta p}\,\dfrac{P}{Q}$.

نجد أن قيمة $\Delta p, \Delta Q$ معرفة، بينما قيمة كل من P, Q غير معرفة وطالما أن عددا كبيرا من القيم يمكن أن تعطي لكل من P, Q على طول القوس AB فإنه لا توجد قيمة محددة لكل من هذين المتغيرين المشار إليهما في التعريف السابق، ويرى بعض الإقتصاديين إعطاء القيم الأصلية للمتغيرين أي:

$$E_p = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \frac{P}{Q}$$

لكن يواجه هذا التعريف مشكلة مفادها تختلف قيمة المرونة في حالة الوضع الأصلي A عنها في حالة الوضع الأصلي B وبالتالي يعطينا هذا المقياس قيمة تقريبية للمرونة كلما اقتربت النقطة B من النقطة A، ولإلغاء هذا المشكل فإنه كلما ابتعدت النقطة B عن النقطة A فمن الأحسن استخدام متوسط الكميتين ومتوسط السعرين.

إذن مرونة القوس تكون في الصورة التالية :

$$E_p = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \times \frac{(P_1 + P_2)/2}{(Q_1 + Q_2)/2}$$

أو :

$$E_p = \frac{\Delta Q}{\Delta p} \Big/ \frac{(Q_1 + Q_2)}{(P_1 + P_2)} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{(P_1 + P_2)}{(Q_1 + Q_2)}$$

**مثال:** الحالة الأولى: يأخذ السعر قيما تنازلية.

| $P$ | $\Delta P$ | $\frac{\Delta P}{P}$ | $Q$ | $\Delta Q$ | $\frac{\Delta Q}{Q}$ | $E_p = -\frac{\Delta Q}{Q} / \frac{\Delta P}{P}$ <br> $E_p = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times -\frac{P}{Q}$ | الملاحظة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | | | 34 | | | | |
| | 30 - | 0,2 - | | 2 | 0,06 | $\frac{0,06}{0,2} = 0,3$ | طلب غير مرن $E_p \langle 1$ |
| 120 | | | 36 | | | | |
| | 20 - | 0,17 - | | 4 | 0,11 | $\frac{0,11}{0,17} = 0,6$ | طلب غير مرن $E_p \langle 1$ |
| 100 | | | 40 | | | | |
| | 15 - | 0,15 - | | 6 | 0,15 | $\frac{0,15}{0,15} = 1$ | طلب تام المرونة $E_p = 1$ |
| 85 | | | 46 | | | | |
| | 10 - | 0,12 - | | 10 | 0,22 | $\frac{0,22}{0,12} = 1,8$ | طلب مرن $E_p \rangle 1$ |
| 75 | | | 56 | | | | |
| | 5 - | 0,07 - | | 30 | 0,54 | $\frac{0,54}{0,07} = 7,7$ | طلب مرن $E_p \rangle 1$ |
| 70 | | | 86 | | | | |

لقد سبقنا المرونة بإشارة سالبة ( ــ ) لكي نحصل على قيمة موجبة أو المرونة بالقيمة المطلقة

**<u>الحالة الثانية</u>: يأخذ السعر قيما تصاعديا**

| $P$ | $\Delta P$ | $\frac{\Delta P}{P}$ | $Q$ | $\Delta Q$ | $\frac{\Delta Q}{Q}$ | $E_p \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P}{Q}$ | الملاحظة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 70 | 5 | 0,07 | 86 | 30 - | 0,34 - | $\frac{0,34}{0,07} = 4,9$ | طلب مرن $E_p \rangle 1$ |
| 75 | 10 | 0,13 | 50 | 10 - | 0,17 - | $\frac{0,17}{0,13} = 1,3$ | طلب مرن $E_p \rangle 1$ |
| 85 | 15 | 0,17 | 46 | 6 - | 0,13 - | $\frac{0,13}{0,17} = 0,7$ | طلب غير مرن $E_p \langle 1$ |
| 100 | 20 | 0,2 | 40 | 4 - | 0,1 - | $\frac{0,1}{0,2} = 0,5$ | طلب غير مرن $E_p \langle 1$ |
| 120<br>150 | 30 | 0,25 | 36<br>34 | 2 - | 0,05 - | $\frac{0,05}{0,25} = 0,2$ | طلب غير مرن $E_p \langle 1$ |

نلاحظ من الحالتين أن المرونة مختلفة في حالة الإنتقال من $P_1$ إلـــى $P_2$ عن حالة الإنتقال من $P_2$ إلى $P_1$ فمثلا عند الإنتقال من السعر 150 إلـــى السعر 120 نجد المرونة $E_p = 0,3$ والطلب غير مرن في حين عند الإنتقال من السعر 120 إلى السعر 150 فإن المرونة تســاوي $E_p = 0,2$ وهكــذا بالنسبة للأسعار الأخرى ولتفادي هذا المشكل لحساب المرونة حسب العلاقة.

$$E_p \frac{\Delta Q}{(Q_1 + Q_2)/2} \bigg/ \frac{\Delta P}{(P_1 + P_2)/2}$$

$$E_p \frac{\Delta Q}{Q_1 + Q_2} \bigg/ \frac{\Delta P}{P_1 + P_2 2} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$$

| $P$ | $\Delta P$ | $P1+P2$ | $Q$ | $\Delta Q$ | $Q1+Q2$ | $Ep$ | مجموع المرونتين عندما تنتقل من $P_1$ إلى $P_2$ و من $P_1$ إلى $P_2$ تقسيم 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 150 | | | 34 | | | | |
| | 30 - | 270 | | 2 | 70 | 0,25 | ( 0,3+ 0,2) / 2= 0,25 |
| 120 | | | 36 | | | | |
| | 20 - | 220 | | 4 | 76 | 0,57 | ( 0,6 + 0;5 ) / 2= 0,55 |
| 100 | | | 40 | | | | |
| | 15 - | 185 | | 6 | 86 | 0,86 | ( 1 + 0,7 ) / 2= 0,85 |
| 85 | | | 46 | | | | |
| | 10 - | 160 | | 10 | 102 | 1,58 | ( 1,8 + 1,3 ) / 2= 1,55 |
| 75 | | | 56 | | | | |
| | 5 - | 145 | | 30 | 142 | 6,2 | ( 7,7 + 4,9 ) / 2= 6,3 |
| 70 | | | 86 | | | | |

يمكننا حساب مرونة القوس $E_P$ ونقوم هنا بحسابها ثم نتمم الجدول.

$$E_p = \left( \frac{2}{70} \Big/ \frac{-30}{270} \right) = -\frac{0,0285}{0,111} = -0,25$$

وهذا بين السعرين 150، 120.

أما بين السعرين 120، 100 فإن'

$$E_p = \left( \frac{4}{76} \Big/ \frac{-20}{220} \right) = -\frac{0,0526}{0,0909} = -0,57$$

أما بين السعرين 100، 85 فإن

$$E_p = -\left( \frac{6}{86} \Big/ \frac{-15}{185} \right) = -\frac{0,0697}{0,081} = -0,86$$

أما بين السعرين 85، 75

$$E_p = -\left( \frac{10}{102} \Big/ \frac{-10}{160} \right) = -\frac{0,098}{0,062} = -1,58$$

أما بين السعرين 75، 70

$$E_p = -\left( \frac{30}{142} \Big/ \frac{-5}{145} \right) = -\frac{0,211}{0,034} = -6.2$$

نلاحظ أن حساب مرونة القوس بالعلاقة $E_p \frac{\Delta Q}{\Delta P} \times \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}$ تعطي نتيجة مساوية تقريبا لمتوسط المرونتين عند الإنتقال من A إلى B ثم من B إلى A.

<u>ثانيا</u>: <u>مرونة نقطة</u> : نعني بها قياس المرونة عند نقطة معينـــة علـــى منحنى الطلب ولتكن A أو B في الشكل ( II، 4 ).

عندما تنطبق النقطة B على النقطة A فإن ΔP يـؤول إلـى الصـفر وعندما نقرب $\frac{\Delta Q}{\Delta p}$ من $\frac{dQ}{dp}$ لأن الوتر [ AB ] يصبح مماسا للمنحنـى D عند النقطة A وبالتالي $E_p \frac{dQ}{dp}.\frac{P}{Q}$

**ملاحظة** : إذا كان لدينا نقطتين B،A على منحنى الطلب كـل منهمـا تمثل ثنائية ( السعر، الكمية ) فيمكننا حساب مرونة السعر الطلب من A إلى B أو من B إلى A. ولإبعاد النتائج المختلفة يمكننا استخدام مرونـة القـوس حيث تستخدم متوسط السعرين ومتوسط الكميتين. أما إذا كان لـدينا نقطـة واحدة فيمكننا حساب مرونة السعر للطلب عند هذه النقطة.

**ثالثا : درجات المرونة :**

**1 ــ حالة الطلب المرن ( كبير المرونة )** : إذا كانت نسبة التغيـر في الكمية المطلوبة أكبـر مـن نسـبة التغيـر فـي السـعر، أي: $E_p \rangle 1$ ( الشكل II. 5 )

**2 ــ حالة الطلب تام المرونة ( المتكافئ المرونـة )** : إذا كانـت نسبة التغير في الكمية المطلوبة تساوي نسبة التغير في السعر، أي : $E_p = 1$ ( الشكل II. 6 )

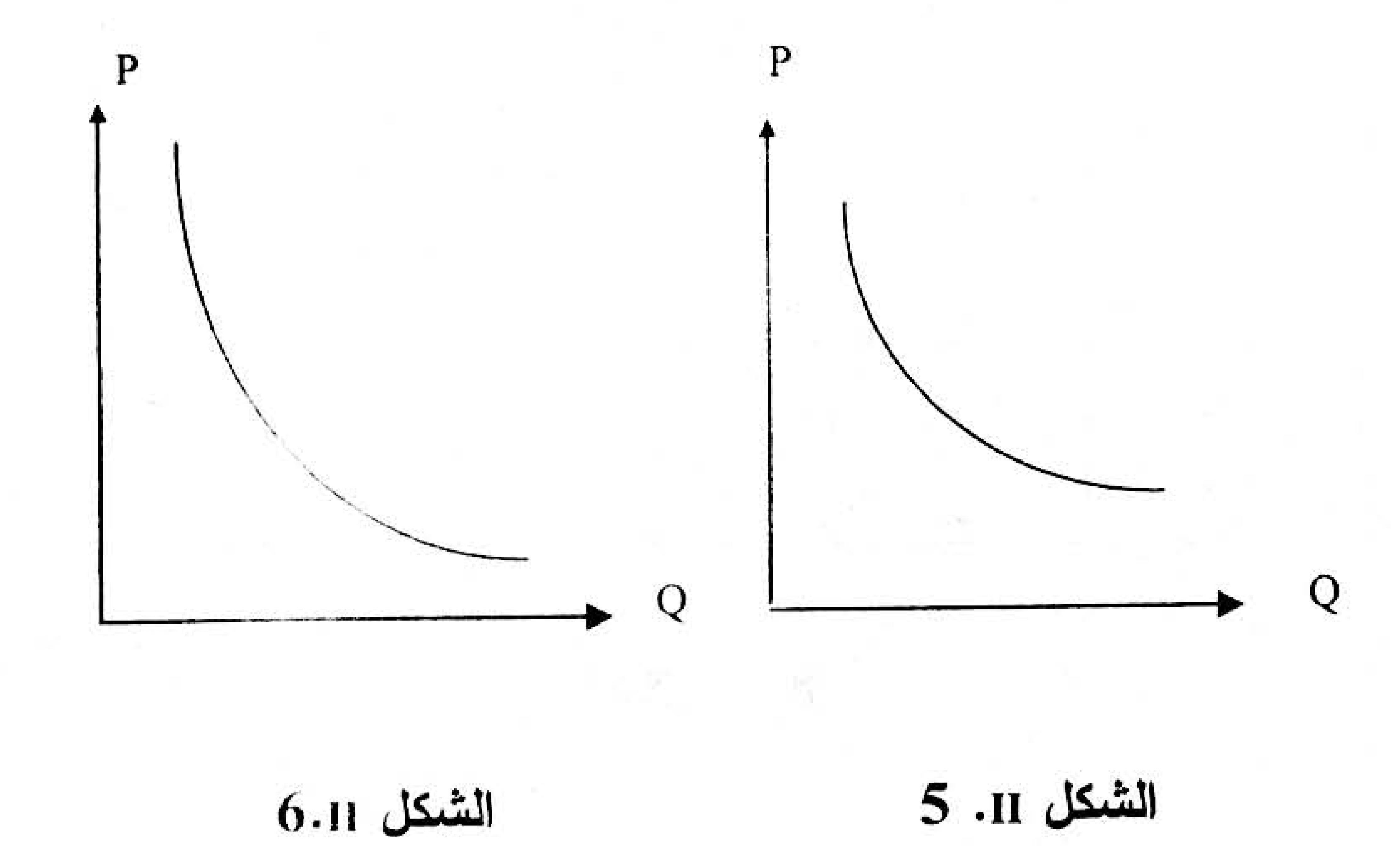
**3 ــ حالة الطلب غير المرن ( قليل المرونة )** : إذا كانـت نسـبة التغير في الكمية المطلوبة أصغر من نسبة التغير في السـعر أي : $E_p \langle 1$ ( الشكل II. 7 ).

**4 ــ حالة الطلب مرن تماما ( إذا مرونة كبيرة جـدا )** : إذا كـان منحنى الطلب موازيا للمحور الأفقي، وهذا يعني أن الكمية تتغير تغيرا كبيرا جدا إذا تغير السعر بشكل قليل جدا. $E_p = \alpha$ ( الشكل II. 8 ).

**5 ـ حالة الطلب عديم المرونة ( غير مرن تماما )**: وهي الحالة التي تبقى فيها الكميات المطلوبة ثابتة مهما تغير السعر أي : $E_p = 0$ (الشكل II. 9 ).

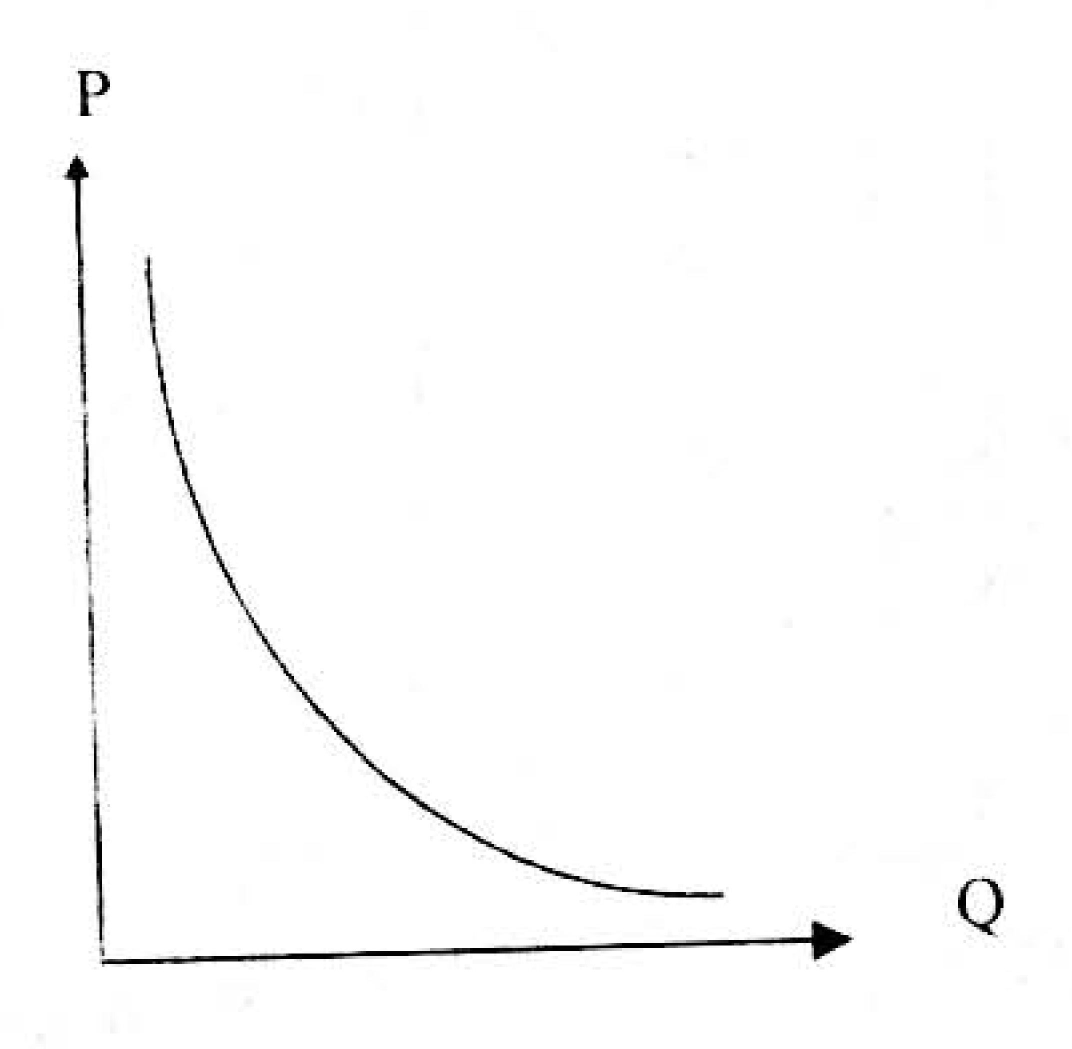
إن الحالات الثلاث الأولى هي الحالات الواقعية، أما الحالتان الأخيرتان فهما حالتان متطرفتان لا يمثلان الواقع.

من أجل رفع سعر سلعة معينة أو تخفيظه يجب دراسة مرونة الطلب على هذه السلعة، فكلما كان الطلب على السلعة أقل مرونة كلما كان رفع السعر في صالح المنتجين. أما إذا كان الطلب على سلعة معينة مرنا فإن رفع سعرها يؤدي إلى صرف المستهلكين عنها. ولهذا بالنسبة لهذه الحالة الأخيرة فإن فرض الضرائب على المنتجات يقلل من أرباح المنتجين ويقلل من حصيلة الضريبة.

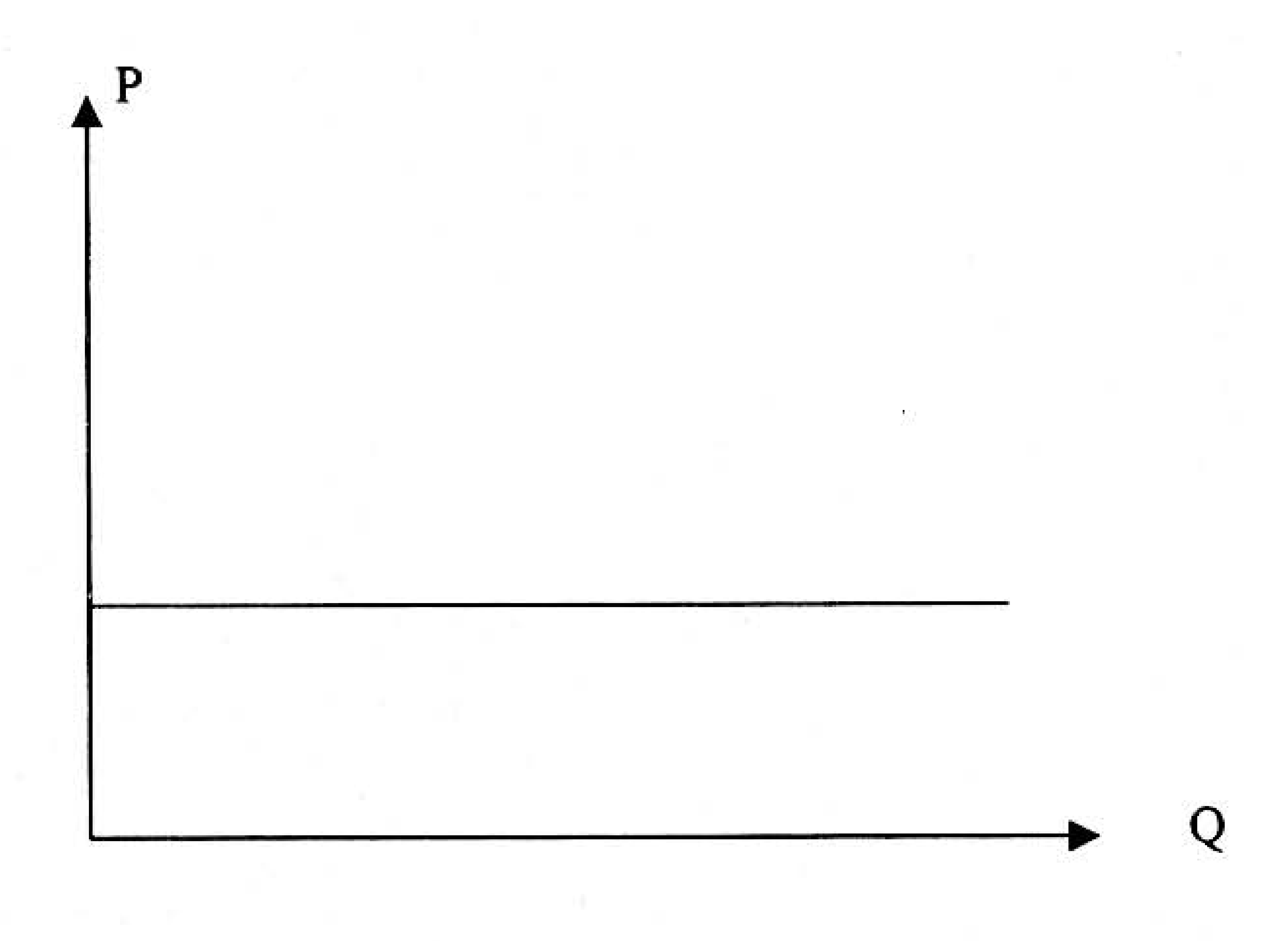



الشكل II. 5

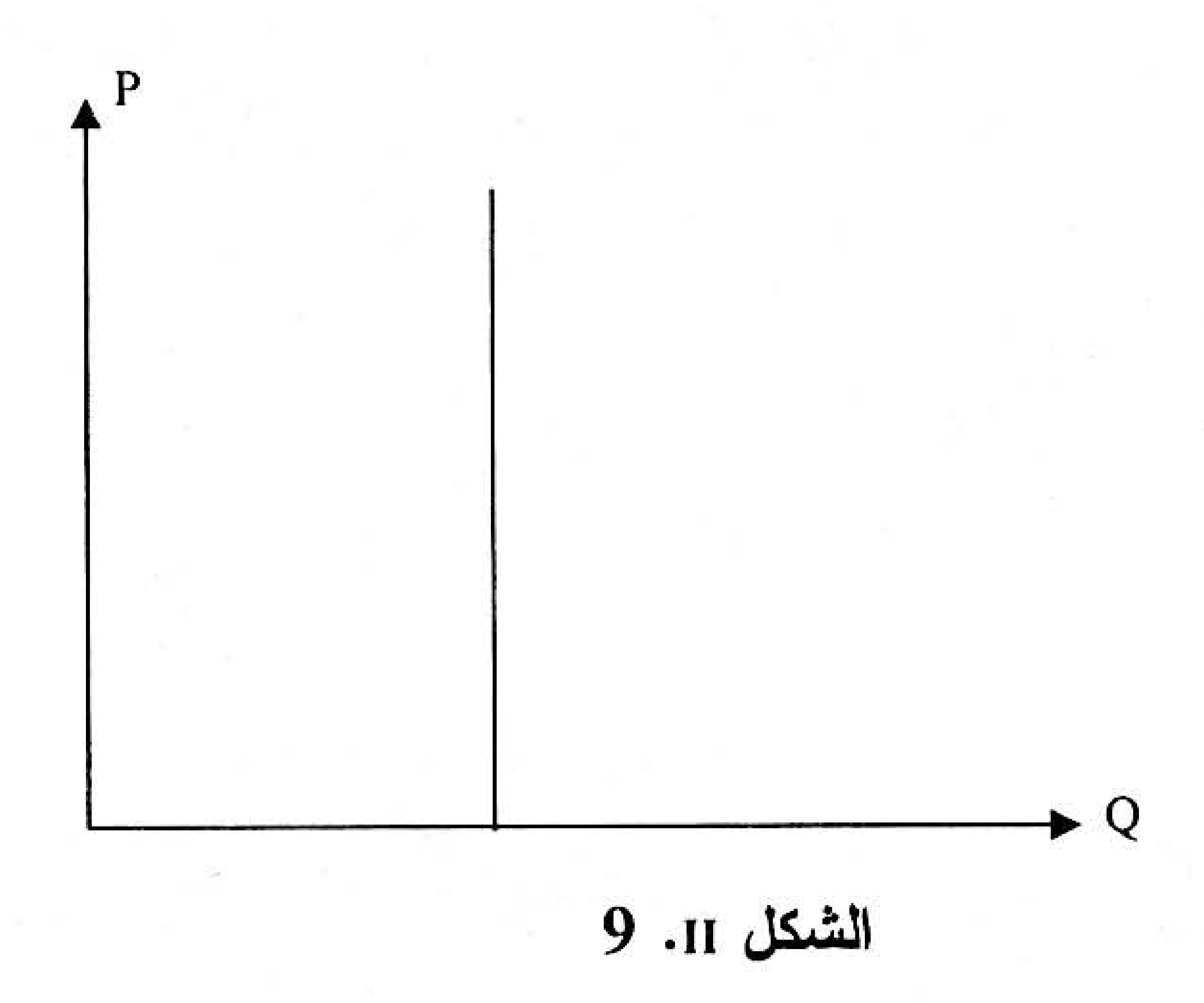
الشكل II.6




الشكل II. 7




الشكل II. 8




الشكل II. 9

**رابعا : العوامل التي تؤثر على مرونة الطلب :**

1 ــ وجود بديل للسلعة : حيث يكون في هذه الحالة الطلب مرنا.

2 ــ سعر السلعة بالنسبة لدخل المستهلك:

إذا كان سعر السلعة يشكل نسبة ضئيلة من دخل المستهلك فإن الطلب على هذه السلعة يكون غير مرن في الغالب.

إذا كان سعر السلعة يشكل عبئا ثقيلا على دخل المستهلك فإن الطلب على هذه السلعة يكون مرنا في الغالب مثل الأثاث، الثلاجات. ويمكن القول أن طلب الأغنياء على السلع المرتفعة السعر يعد غير مرن مثل الفواكه وأدوات الزينة.

3 ـ ضرورة السلعة : إذا كانت السلعة ضرورية فيكون الطلب عليها قليل المرونة إذا كانت الزيادة متناسبة مع درجة ضرورة السلعة. أما إذا كان غير ذلك فيكون الطلب مرنا.

4 ـ تعدد استعمالات السلعة : إذا كانت للسلعة استعمالات متعددة فإن الطلب عليها يكون مرنا أما السلع الوحيدة الإستعمال فإن الطلب عليها غير مرن غالبا.

**مثال 1** : أحسب المرونات ( مرونة الطلب بالنسبة للسعر ) عندما $P=2$ ، $P=5$ ، $P=8$.

ودالة الطلب

$$Q = 200 - 20P$$

$$Q = \frac{5}{P} \quad \text{و}$$

عندما $Q = 200 - 20P$ فإن $\frac{dQ}{dp} = -20$

$$E_p = -20\frac{P}{200-20P} = \frac{P}{10-P}$$

عندما $P=2$ فإن:

طلب قليل المرونة. $E_p = -\frac{2}{8} = -0,25$

عندما P = 5 فإن:

طلب متكافئ المرونة $E_p = -\frac{5}{5} = -1$

عندما P = 8 فإن:

طلب مرن $E_p = -\frac{8}{2} = -4$

هذه السلعة ضرورية، حيث كانت قليلة المرونة. إلا أن الزيادة المجحفة في السعر أدت إلى مرونة طلبها السعرية أصبحت كبيرة.

عندما:

$$= \frac{5}{P} \text{ فإن } \frac{dQ}{dp_1} = \frac{5}{P^2}$$

$$E_p = -\frac{5}{P^2} \cdot \left( \frac{P}{\frac{5}{P}} \right) = -1$$

طلب متكافئ المرونة: أي أن المرونة عند أي سعر تكون متكافئة. ويتضح ذلك من كون الدالة توضح أن مجموع إنفاق المستهلك على السلعة ثابت مهما تغير السعر حيث يقابل ذلك تغير مماثل عكسي في الطلب ولهذا يكون Q × P =5 قيمة ثابتة.

**مثال 2** : إذا كانت دالة الطلب Q = 60 – 4P أحسب مرونة الطلب عند السعر 5 و السعر 15 ثم أحسب مرونة الطلب بين السعرين 5، 10 ثم بين السعرين 10، 12.

عندما $Q = 60 - 4P$ فإن $\frac{dQ}{dp} = -4$

و $E_p = -\frac{4P}{60 - 4P}$

وعندما P = 5 فإن

طلب قليل المرونة $$E_p = \frac{(4)(5)}{60-4(5)} = -\frac{1}{2}$$

وعندما P = 15 فإن

طلب مرن $$E_p = -\frac{(4)(12)}{60-(4)(12)} = -\frac{48}{12} = -4$$

مرونة القوس: $$E_p \frac{dQ}{dP} \times \frac{P_1+P_2}{Q_1+Q_2}$$

المرونة بين السعرين 5، 10

عندما P = 5 فإن $Q = 60-(4)(5) = 40$

وعندما P = 10 فإن: $Q = 60-(4)(10) = 20$

وأن طلب متكافئ المرونة: 1- = $E_p = -4x\frac{5+10}{40+20} = -4x\frac{15}{60}$

المرونة بين السعرين 10، 12

عندما P = 12 فإن $Q = 60-(4)\,(12) = 12$

وأن $$E_p = -4x\frac{10+12}{20+12} = -4x\frac{22}{32} = -\frac{11}{4}$$

طلب مرن: Ep = - 2.75

**<u>خامسا</u> : <u>المرونات الجزئية للطلب</u> :**

لقد قلنا سابقا أن الطلب على السلعة هو تابع لمجموعة من المتغيرات من بينها سعرها وأسعار السلع الأخرى. وإذا فرضنا وجود سلعتين X و Y مع فرض ثبات جميع محددات الطلب باستثناء سعري السلعتين Px ، Py فإن تابع الطلب يكون على الشكل التالي :

$$Q_D = \int f(P_x, P_y)$$

في هذه الحالة نستنتج نوعين من المرونات الجزئية للطلب :

أ ــ <u>المرونة الجزئية المباشرة</u> : وهي مرونة الطلب على إحدى السلعتين بالنسبة لسعرها مع ثبات سعر السلعة الأخرى ولقد درسناها سابقا.

ب ــ <u>المرونة الجزئية التبادلية للطلب</u> : وهي مرونة الطلب على إحدى السلعتين بالنسبة لسعر السلعة الأخرى.

إذا كانت دالة الطلب للسلعتين X ، Y على التوالي :

$$Q_{DY} = f(P_x, P_y), \quad Q_{DX} = f(P_x, P_y)$$

وإذا فرضنا أن كل سلعة تتأثر بسعر السلعة الأخرى وأن سعرها ثابت فإن دوال الطلب السابقة تصبح من الصورة التالية :

$$Q_{dy} = f(P_x), \quad Q_{dx} = (P_y)$$

<u>مرونة السلعة X بالنسبة لسعر السلعة Y</u> :

$$E_{xy} = \frac{\Delta Q_{DX} / Q_{DX}}{\Delta p_Y / P_Y} = \frac{\Delta Q_{DX}}{\Delta P_Y} \cdot \frac{P_y}{Q_{DX}}$$

وبالتقريب:

$$E_{xy} = \frac{\partial Q_{DX}}{\partial PY} \cdot \frac{P_y}{Q_{DX}}$$

<u>مرونة السلعة Y بالنسبة للسلعة X</u> :

لتكن دالة الطلب $Q_{dy} = f(P_x)$ ، يمكننا الرمز لكمية الطلب على السلعة Y بالرمز $Q_Y$

$$E_{YX} = \frac{\Delta Q_{DY}}{\Delta p_X} \times \frac{P_X}{Q_{DY}} = \frac{\partial Q_{DY}}{\partial Px} \times \frac{P_X}{Q_{DY}}$$

**<u>مثال 1</u>** : إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما بدلالة سعرها P1 وسعر سلعة أخرى P2 ( السلعتان هما X، Y ) من الصورة :

$$Q_X = 7 p_1^{-1,3} . P_2^{-0,4}$$

أحسب مرونة السعر الطلب تبعا لكل من السعرين وهذا بالنسبة للسلعة X.

من السؤال السابق يظهر وجود مرونتين هما المرونة الجزئية المباشرة والمرونة الجزئية التبادلية ( مرونة التقاطع ).

**<u>المرونة الجزئية المباشرة</u>** :

$$E_{p1} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_1} \times \frac{P_1}{Q_X}$$

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_1} = 7.(-1,3) p_1^{-2,3} . p_2^{-0,4}$$

إذن: $E_{p1} = 7.(-1,3) P_1^{-2,3} . P_2^{-0,4} . \frac{P_1}{7 p_1^{-1,3} . P_2^{-0,4}} = -1,3$

المرونة ثابتة مهما كان السعر $P_1$ وهذا الطلب مرن. أما الإشارة السالبة فهي تبين العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة والسعر.

**<u>المرونة الجزئية التبادلية ( مرونة التقاطع )</u>** :

مرونة الطلب بالنسبة للسعر $P_2$.

$$E_{XY} = Ep_2 = \frac{\partial Q_X}{\partial p_2} \times \frac{P_2}{Q_x}$$

$$\frac{\partial Q_X}{\partial p_2} = -0,4.7.P_1^{-1,3}.P_2^{-1,4}$$

$$E_{XY} = EP_2 = -0,4.7.P_1^{-1,3}.P_2^{-1,4}.\frac{P_2}{7P_1^{-1,3}.P_2^{-0.4}} = -0,4$$

المرونة ثابتة مهما كان السعر P2 والطلب قليل المرونة، أما الإشـــارة السالبة فإنها تدل على تكامل السلعتين موضع البحث، حيث أن ارتفاع ســـعر السلعة الثانية يؤدي إلى نقصان الطلب عليها ونقصان الطلب علـــى الســلعة الأولى المتكاملة معها مثل الشاي والسكر، كذلك البنزين والسيارات.

**<u>مثال 2</u>** : إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما بدلالة سعرها P1.

وسعر سلعة أخرى P2 هي Q = 20 – 2 P1 + P2

أحسب مرونة السعر الطلب عندما يكون P1 = 10 ، P2 = 5.

من السؤال السابق يظهر وجود مرونتين هما المرونة الجزئية المباشرة والمرونة الجزئية التبادلية.

**<u>المرونة الجزئية المباشرة:</u>**

لدينا $E_{p1} = \frac{\partial Q}{\partial P_1} \times \frac{P_1}{Q}$

و $\frac{\partial Q}{\partial P_1} = -2$

إذن : $E_{p_2} = -2.\frac{P_1}{20-2P_1+P_2} = -2\times\frac{10}{20-2(10)+5} = -4$

الطلب مرن والإشارة السالبة تبين العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة والسعر P1 الذي هو سعر السلعة الأولى.

**المرونة الجزئية التبادلية ( مرونة التقاطع ).**

$$E_{P_2} = \frac{\partial Q}{\partial P_2} \times \frac{P_2}{Q}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial P_2} = 1$$

$$E_{P_2} = 1 . \frac{P_2}{20 - 2P_1 + P_2} = \frac{5}{20 - 2(10) + 5} = 1$$

المرونة متكافئة ( طلب تام المرونة ) والإشارة الموجبة تدل على أن السلعة الثانية تنافس السلعة الأولى.

**ملاحظة** : لو رجعنا إلى المثالين السابقين لوجدنا الإشارة السابقة للعدد الممثل للمرونة مختلفة.

في المثال الأول : الإشارة سالبة Ep2 = - 0,4 وتبين تكامل السلعتين.

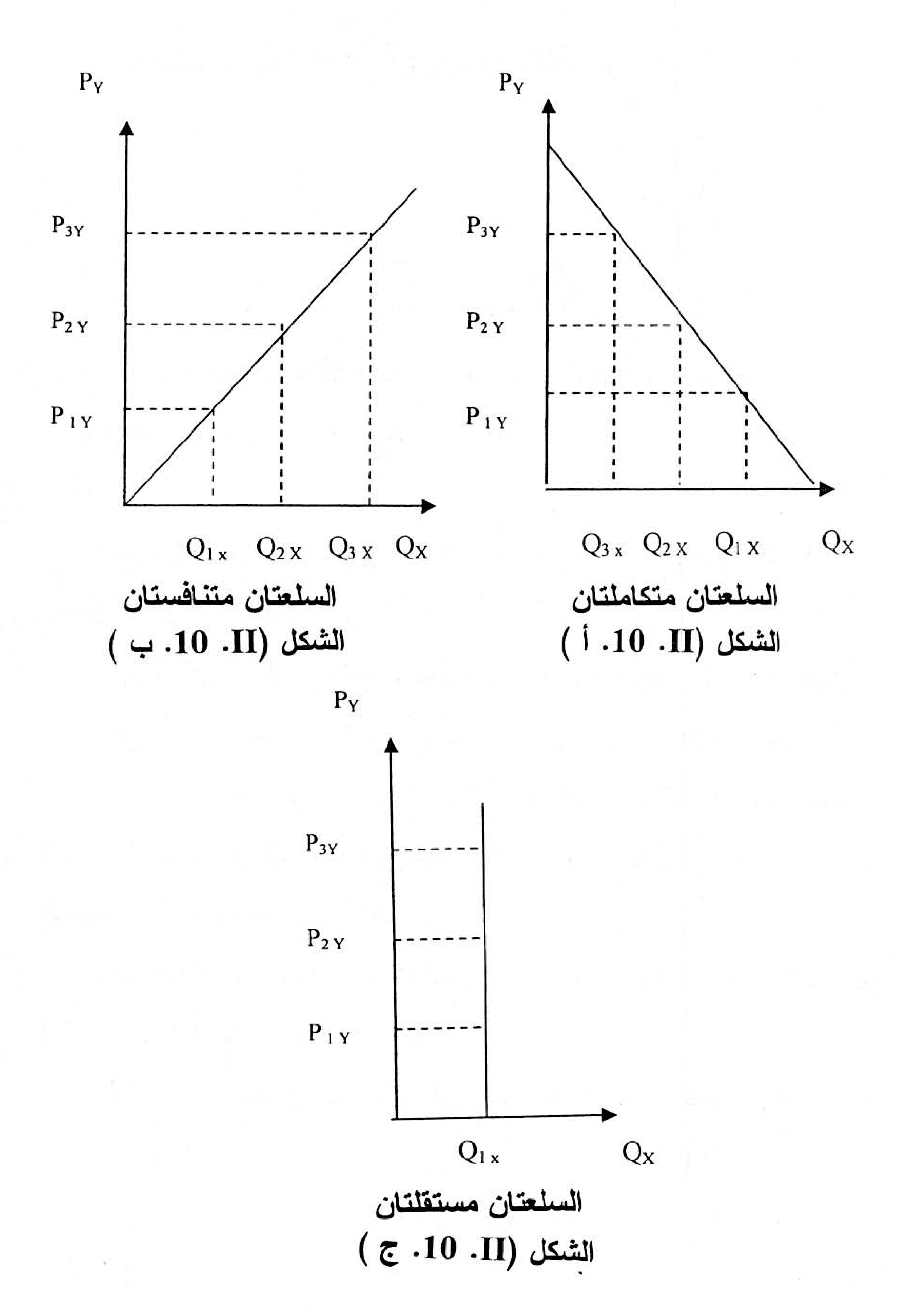
في المثال الثاني : الإشارة موجبة Ep2 = 1 وتبين تنافس السلعتين.

إذن للإشارة معنى هام يبين العلاقة بين السلعتين في حين الإشارة السابقة للعدد الممثل للمرونة الجزئية المباشرة يبين العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة وسعر السلعة المدروسة.

إذن إذا كانت السلعتان متكاملتين فإن المرونة أصغر من الصفر ( Exy < 0 ) الشكل ( II. 10. أ ).

إذا كانت السلعتان متنافستين فإن المرونة أكبر من الصفر (Exy > 0 ) الشكل ( II. 10 – ب).

إذا كانت السلعتان مستقلتين فإن المرونة تساوي صفر (Exy = 0 ) الشكل ( II. 10 – ج).




السلعتان متكاملتان
الشكل (II. 10. أ )

السلعتان متنافستان
الشكل (II. 10. ب )

السلعتان مستقلتان
الشكل (II. 10. ج )

كما نلاحظ أننا استعملنا المشتقات الجزئية في المثالين والسبب في ذلك كون الطلب تابع لسعرين P1، P2 هما متغيران مستقلان.

**1. 2 ـ مرونة الدخل / الطلب** : هي درجة استجابة الطلب للتغير النسبي الحاصل في الدخل R.

$$E_R = \frac{\Delta Q}{\Delta R} \times \frac{R}{Q} = \frac{dQ}{dR} \times \frac{R}{Q}$$

ولما كانت العلاقة الدالية بين الطلب والدخل هي علاقة طردية وبالتالي تتغير الكمية المطلوبة في نفس اتجاه التغير في الدخل، فإن علامة مرونة الطلب للدخل تكون موجبة في الحالة العامة. لكنه يلاحظ بالنسبة للسلع الدنيا تكون العلاقة عكسية بين الكمية المطلوبة والدخل وبالتالي المرونة سالبة. ولقد قسمنا سابقا حسب ما تعارف عليه الإقتصاديون السلع طبيعية وسلع دنيا أما الآن بعد تعرضنا للمرونة نجد السلع الطبيعية مقسمة إلى :

أ ) سلع كمالية ومرونتها تكون أكبر من الواحد ( $ER > 1$ ).

ب) سلع عادية أو ضرورية ومرونتها تكون محصورة بين الصفر والواحد $(0 \langle E_R \leq 1)$.

أما السلع الدنيا * فهي السلع التي مرونة الطلب عليها عند تغير الدخل أقل من الصفر $(E_R \langle 0)$.

**مثال 1** : أحسب مرونة الدخل / الطلب عندما R = 1000 إذا علمت أن $Q_D = 2R + 25$

* السلع الدنيا: نقصد بالسلع الدنيا تلك السلع التي ترتب في مراتب دنيا من سلم التفصيلات السلعية، أي دنيا في سلم التفضيلات بين السلع.

$$E_R \frac{dQ}{dR} \times \frac{R}{Q}$$

$$\frac{dQ}{dR} = 2$$

$$E_R = 2 \frac{R}{2R + 25} = 2 \frac{1000}{2(1000) + 25} = \frac{2000}{2025} = 0,98$$

تدل قيمة المرونة على أنه إذا ارتفع الدخل بمقدار 1 % فــإن الكميــة المطلوبة سوف ترتفع بمقدار 0,98 %، وبما أن المرونة موجبة وأقــل مــن الواحد فإننا نستنتج أن هذه السلعة عادية ( ضرورية ).

**<u>مثال 2</u>** : أحسب مرونة الدخل/ الطلب حسب مستويات الدخل المختلفة من الجدول التالي :

| $Q$ | $\Delta Q/Q$ | $R$ | $\Delta R/R$ | $E_R$ | الملاحظات |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | 8000 | | | |
| | 100 | | 50 | 2 | سلعة كمالية $E_R \rangle 1$ |
| 10 | | 12000 | | | |
| | 50 | | 33,3 | 1,5 | سلعة كمالية $E_R \rangle 1$ |
| 15 | | 16000 | | | |
| | 20 | | 25 | 0,8 | سلعة ضرورية $0 \langle E_R \leq 1$ |
| 18 | | 20000 | | | |
| | 11,11 | | 20 | 0,56 | سلعة ضرورية $0 \langle E_R \leq 1$ |
| 20 | | 24000 | | | |
| | 5 - | | 16,67 | 0,3 - | سلعة دنيا $E_R \langle 0$ |
| 19 | | 28000 | | | |
| | 5,26 - | | 12,5 | 0,42 - | سلعة دنيا $E_R \langle 0$ |
| 18 | | 32000 | | | |

إذا فرضنا أن هذه السلعة هي اللباس فإنه عند أدنى مستويات الدخل المرتفعة 16000 دينار أو أقل في السنة يفترض في هذه الأسرة أن يكون أغلب استهلاكها من اللباس الرخيص، أما اللباس العادي فيعد بالنسبة لها كمالي. وعند المستويات المتوسطة من الدخل ($16000 \langle R \leq 24000$ دينار).

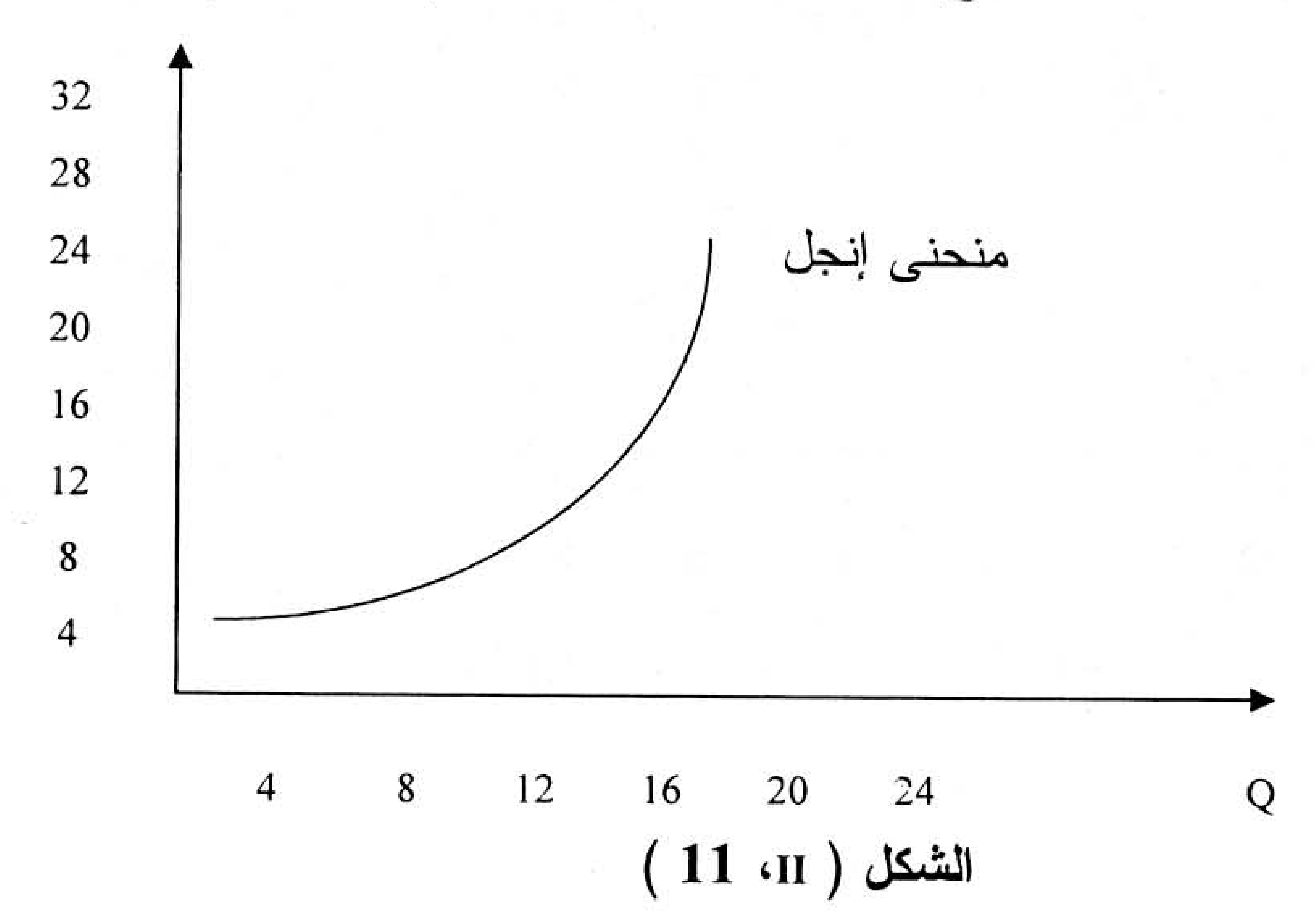
في السنة يكون اللباس العادي ضروري، أما عند المستويات المرتفعة من الدخل $R \rangle 24000$ دينار في السنة تبدأ هذه الأسرة في خفض استهلاكها من اللباس العادي بقدر أكبر من الألبسة الممتازة. ( أنظر الشكل II، 11 ).

الصيغة الرياضية لمنحنى إنجل هي: $Q = a R^b$

حيث R هو دخل الأسرة.

a ثابت قيمته أكبر من الصفر.

b ثابت تتراوح قيمته بين الصفر والواحد ( $0 < b < 1$ ).




**الشكل ( II، 11 )**

**<u>ملاحظة</u>** : إذا أخذنا دالة الطلب في صورتها العامة أي أننا نعتبر الكمية المطلوبة تابع لكل محددات الطلب.

$$Q_D = F(P_a, P_B, P_c, \ldots\ldots R, T\ldots..)$$

فإننا عند حساب مرونة الطلب بالنسبة لأي محدد نستعمل المشتقة الجزئية للكمية المطلوبة بالنسبة للمحدد المعين مثل

$$E_p = \frac{SQ}{Sp_A} \cdot \frac{P_A}{Q}$$

**تمرين 1** : بلغ متوسط استهلاك الفرد في سنة الأساس 750 د.ج وكان متوسط استهلاك الفرد من الفواكه 50 د.ج وتبين في الحسابات أن معامل مرونة الطلب على الفواكه هو : ER = 0.67.

فإذا علمت أن متوسط دخل الفرد سوف يزداد في العام القادم بمعدل 5 % وأن متوسط التزايد السكاني سيكون 2 % فما هو حجم الطلب الإجمالي على الفواكه في السنة القادمة علما أن عدد السكان N في سنة الأساس هو 6 مليون.

**لدينا** :

$$E_R = \frac{\Delta Q}{Q} \bigg/ \frac{\Delta R}{R}$$

$$0{,}67 = \frac{\Delta Q / Q}{5 / 100}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 0{,}67 \times \frac{5}{100} = \frac{3{,}35}{100}$$

وعليه ستكون كمية الزيادة تساوي :

$$\frac{\Delta Q}{50} = \frac{3{,}35}{100} \Rightarrow \Delta Q = \frac{50 \times 3{,}35}{100} = 1{,}675$$

كمية طلب الفرد تساوي بالكيلوغرام :

$$Q + \Delta Q = 50 + 1{,}675 = 51{,}675$$

عدد السكان في سنة المقارنة :

$$N = (6)(1,02) = 6,12$$

حجم الطلب الكلي بالمليون كيلوغرام :

$$Q.N = 51,675 \times 6,12 = 316,251$$

**<u>تمرين</u> 2:** ليكن لدينا مجتمع مؤلف من 4 مليون شخص، ويبلغ متوسط دخل الفرد 600 د.ج سنويا، ومتوسط استهلاك الفرد من الأقمشة القطنية هو 10 كلغ سنويا، وقد دلت الحسابات على أن مرونة الدخل/ الطلب على الأقمشة القطنية هو 1,2 ، فإذا علمت أن الأسعار ستبقى ثابتة، وأن السكان في العام القادم سوف يزدادون بنسبة 2,5 % وأن دخل الفرد سوف يزداد بمقدار 3 %، أحسب نسبة الزيادة المتوقعة لطلب الفرد ثم كمية الطلب في العام القادم، وكذلك مقدار الزيادة في الطلب الكلي.

حجم الطلب الحالي = عدد السكان × طلب الفرد

$$Q = N.Qi = 4.000.000 \times 10 = 40.000.000$$

إذن حجم الطلب الحالي 40 مليون كلغ.

عدد السكان في السنة القادمة.

$$N = 4.000.000 + \frac{4.000.000.2,5}{100} = 4.100.000$$

$$E_R = \frac{\Delta Q / Q}{\Delta R / R}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1,2.3}{100} = 0,036$$

طلب الفرد في العام القادم $.Q_i = 10 + (10.0,036) = 10,36$

الطلب في العام القادم = عدد السكان في العام القادم × طلب الفرد.

$$Q = N.Q_i = 4.100.000 \times 10,36 = 42.476.000$$

وبالتالي مقدار الزيادة في الطلب الكلي العام القادم.

$\Delta Q = 42.476.000 - 40.000.000 = 2.476.000$ كيلوغرام

**تمرين 3:**

لنفرض أن متوسط الإستهلاك من مادة اللحم في سنة الأساس يبلغ واحد كيلوغرام للأفراد الذين يتراوح دخول أسرهم بين 300 ، 500 دينار في الشهر. ونفرض كذلك أن متوسط عدد أفراد الأسرة هو 4 أفراد، وأن متوسط دخل الفرد يزيد بنسبة 25 % خلال سنوات الخطة، فما هو حجم الطلب الشهري للفرد من اللحم في السنة الخامسة للخطة وذلك بالنسبة إلى فئة الدخل بين 300 و 500 دينار، إذا علمت أن $E_R = 1$ ؟

**الجواب :**

متوسط دخل الفرد في الشهر:

$$R = \left(\frac{500 + 300}{2}\right) \Big/ 4 = 100$$

الزيادة في متوسط دخل الفرد

$$\Delta R = \left(\frac{100.25}{100}\right) = 25$$

$$E_p = \frac{\Delta Q \ / Q}{\Delta R \ / R} = \frac{\Delta Q}{\Delta R} x \frac{R}{Q}$$

$$1 = \frac{\Delta Q}{25} x \frac{100}{1}$$

إذن: $\Delta Q = \frac{25}{100} = 0,25$

وبالتالي حجم الطلب الشهري للفرد من مادة اللحم في السنة الخامسة للخطة:

$Q = 1 + 0.25 = 1.25$ ( كلغ )

# الفصل الثاني

# العـــــرض

**I – العرض** : يعرف العرض بأنه " الكمية التي يقبل البائعون بيعها عند سعر معين وفي فترة زمنية معينة ".

نستنتج من التعريف ما يلي :

1 – يشير العرض إلى العرض الكلي لسلعة ما من قبل البائعين في السوق.

2 – يعتمد العرض على السعر، ففي حالة ثبات جميع العوامل الأخرى يتمدد العرض عند ارتفاع السعر وينكمش بانخفاضه.

3 – يعتمد العرض على الفترة الزمنية وتتجلى أهمية الزمن بالنسبة للعرض إذا أخذنا بعين الإعتبار أن الفترة اللازمة للإنتاج تختلف من سلعة إلى أخرى.

4 – يعتمد العرض على مجموعة من العوامل تسمى محددات العرض. ويطلق على العلاقة التي تجمع بين الكمية المعروضة من سلعة معينة والعوامل الرئيسية المحددة لها بدالة العرض وتكتب على الشكل التالي:

$$QsaL = fi\ (PA, PB, PC.....Pk, Pl....E, t)$$

حيث :

QsaL تمثل الكمية المعروضة من السلعة A.

PA تمثل سعر السلعة A.

PC, PB تمثل أسعار السلع الأخرى.

Pk، PL تمثل أسعار عوامل الإنتاج.

T يمثل الزمن.

**1 ــ قانون العرض :**

قبل أن نتكلم عن قانون العرض نسأل ما هي العوامل التي تؤثر على العرض بخلاف السعر؟

توجد مجموعة من العوامل بخلاف السعر تؤثر في العرض من بينها:

أ ــ يعتمد عرض السلعة على أسعار السلع الأخرى.

ب ــ يعتمد عرض السلعة على أسعار عوامل الإنتاج.

ج ــ يعتمد على المستوى السائد للمعرفة الفنية.

د ــ يعتمد على المستوى الفني للإنتاج.

هـ ــ فرض الضرائب أو دفع إعانات حكومية للإنتاج.

إذا ثبتنا هذه العوامل واعتبرنا العامل الوحيد الذي يمثل متغيرا مستقلا هو السعر فنجد علاقة طردية بين السعر والكميات المعروضة.

حيث ارتفاع الأسعار يزيد من أرباح المنتجين وهذا يشجعهم على زيادة الإنتاج وعرضه للبيع. إلا أن هؤلاء المنتجين لا يمكنهم الإستمرار في زيادة الإنتاج لأن تكاليف الوحدة المنتجة ترتفع بزيادة الإنتاج وبالتالي فعند تساوي مستوى سعر الوحدة مع التكلفة الحدية لإنتاج الوحدة فإنهم يتوقفون عن الإنتاج وإذا ارتفع السعر مرة أخرى فإنهم يزيدون في إنتاجهم إلى الحد الذي يتساوى عنده السعر بالتكلفة الحدية.

كذلك بالنسبة لانخفاض السعر فالمنتجون ينتجون عند تساوي السعر بالتكلفة الحدية فإذا انخفض السعر تصبح التكلفة الحدية أكبر من السعر وبالتالي يخفض المنتجون من إنتاجهم إلى المستوى الذي تتساوى عنده التكلفة الحدية بالسعر.

إذن قانون العرض هو : " تتمدد الكميات المعروضة بزيادة السعر وتنكمش بنقصان السعر شريطة أن تبقى جميع العوامل الأخرى ثابتة ".

$$Q_{Si} = f_i (P_A)$$

حيث Qsi هو عرض المنتج الواحد، أما $P_A$ فهو سعر السلعة A.

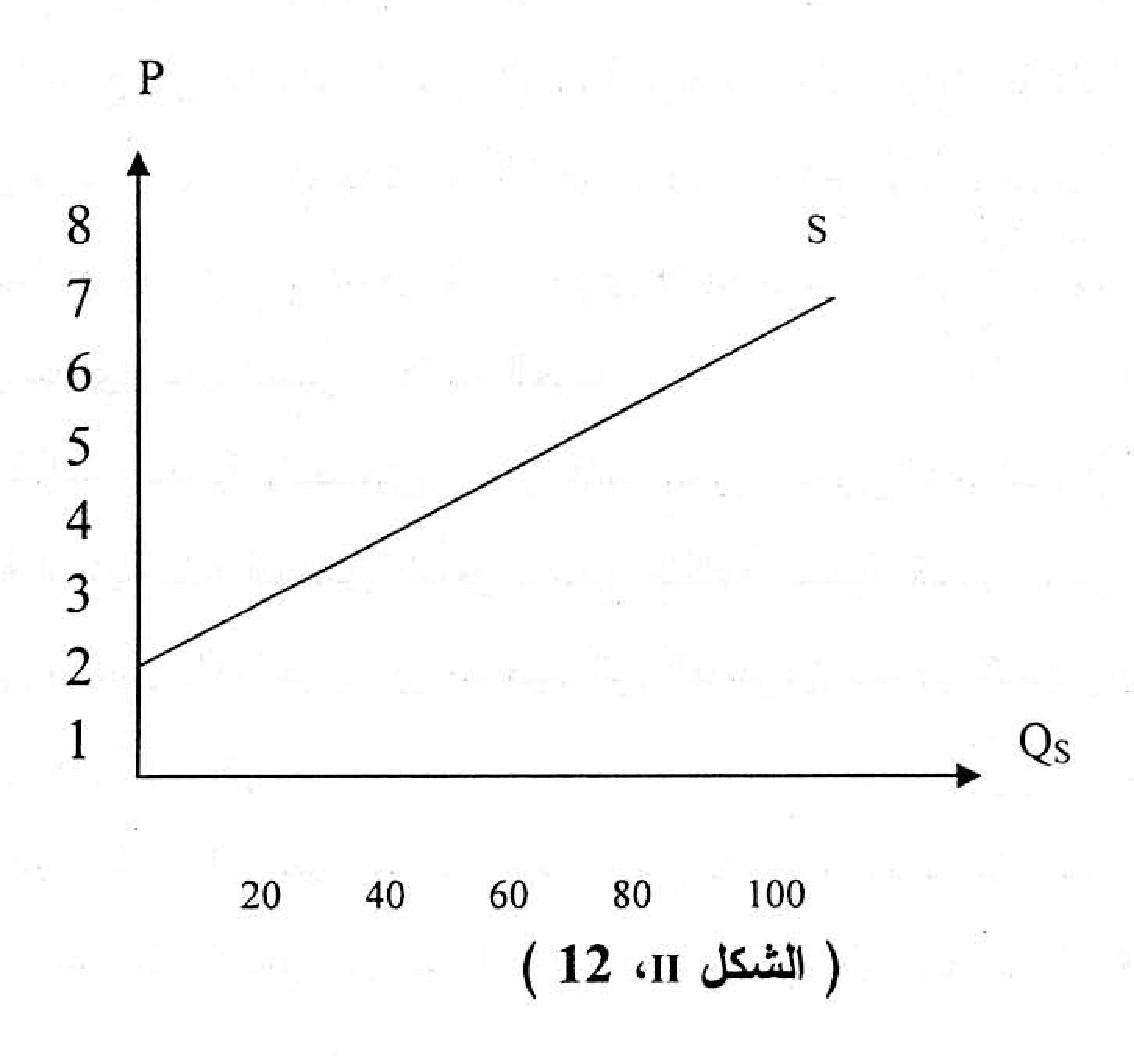
أما إذا كنا بصدد العرض الكلي ( عرض السوق ) فإننا نكتبه في الصورة

$$Q_S = \sum_{i=1}^{n} f_i (P_A)$$

حيث يمثل عرض السوق مجموع عرض المنتجين.

<u>مثال 1</u> : إذا فرضنا دالة عرض المنتج الواحد لسلعة ما هي Qs = - 40 + 20 P وإذا علمت أن السعر P أخذ قيما تنازليــة 6، 5، 4، 3، 2 أرســم منحنــى عرض هذه السلعة إذا علمت ثبات جميع المحددات الأخرى.

| P | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Qs | 80 | 60 | 40 | 20 | 0 |




**( الشكل II، 12 )**

نلاحظ من الجدول أنه كلما انخفض سعر السلعة كلما انكمشت الكمية المعروضة والعكس صحيح. كما نلاحظ من كون ميل منحنى العرض موجب بسبب العلاقة الطردية بين السعر والكمية ( الشكل، II، 12 ).

**<u>مثال 2</u>** : إذا كان في السوق 100 منتج يعرضون نفس السلعة، وكانت دالة عرض المنتج الواحد منهم لهذه السلعة هي $Q_{SI} = 40- + 20\ P$ عين دالة العرض الكلي بما أن المنتجين متماثلون في هذه السوق فإن دالة العرض الكلي هي :

$$Q_s = 100\ Q_{si} = 100\ (-40 + 20\ P)$$

$$Q_s = -4000 + 2000\ P$$

## 2 ـ استثناءات قانون العرض :

رأينا حسب قانون العرض العلاقة الطردية بين السعر والكمية المعروضة لكن لهذا القانون استثناءات حيث تصبح العلاقة بينهما عكسية ومن هذه الإستثناءات.

### 2. 1 ـ توقع استمرار زيادة السعر أو نقصه :

عندما يتوقع المنتجون استمرارية الزيادة في السعر يفضلون عدم التجاوب معها بل يقللون من عرض سلعهم بغية تحقيق أرباح أكبر عندما يتحقق الإستمرار في زيادة السعر.

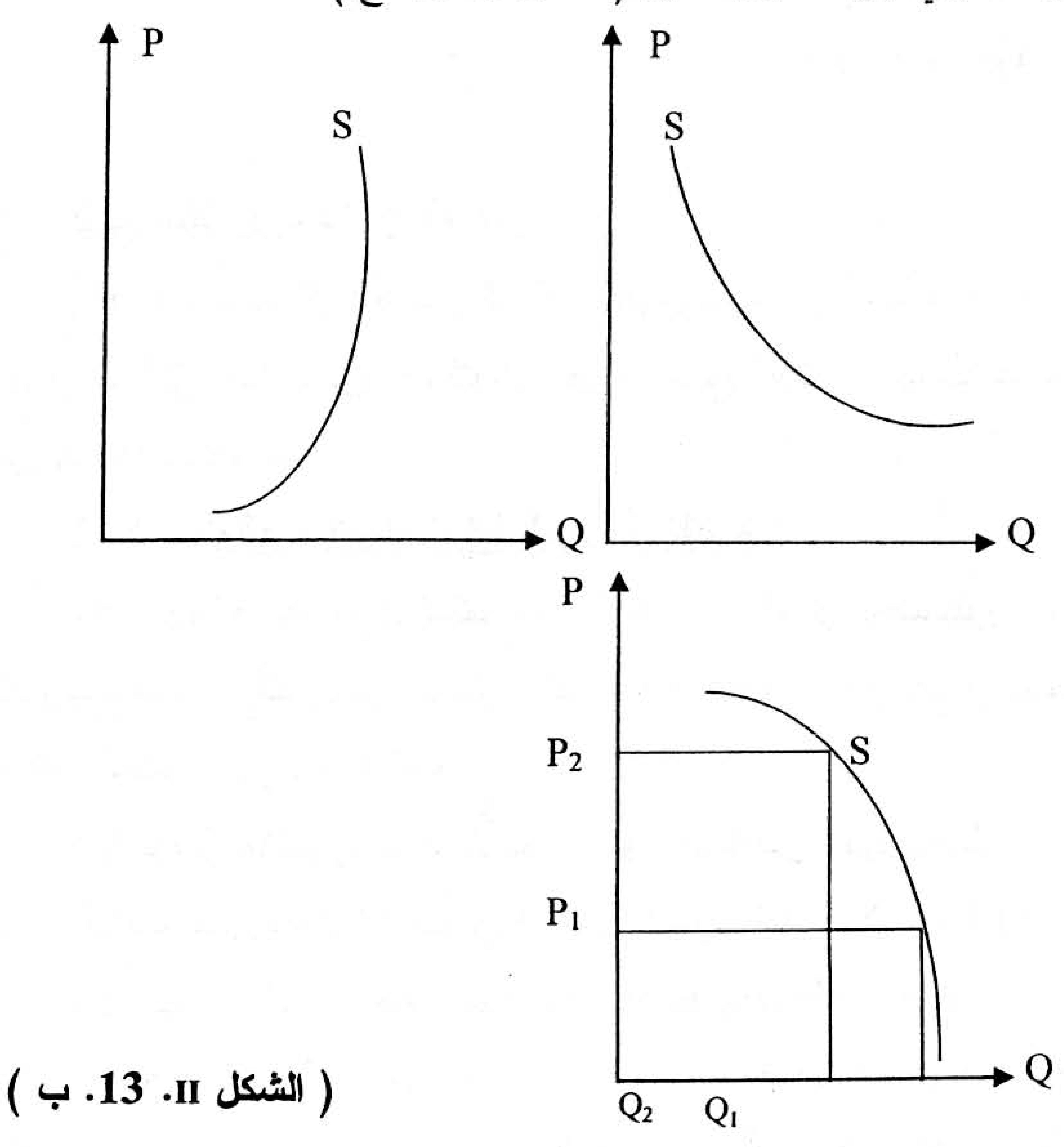
وإذا توقع المنتجون اتجاه الأسعار نحو الانخفاض فإنهم يفضلون زيادة عرض سلعهم حتى يتفادوا انخفاض أرباحهم المتوقعة ( الشكل II. 13. أ ).

### 2.2. يخضع عرض المحصولات الزراعية إلى نوع من الثبات النسبي:

يخضع عرض المحصولات الزراعية إلى نوع من الثبات النسبي وذلك لضرورة إنقضاء مدة بين بذر البذور وجني المحصول. فعندما يقترب ميعاد جني المحصول ويتضح أن أسعار البيع سوف ترتفع فإن الزارع لن

يستطيع زيادة المساحات المزروعة وكذلك فإن انخفاض الأسعار لا يــؤدي إلى انكماش عرض المحاصيل الزراعية بل يحدث العكــس حيــث يعتنــي المزارع بزراعته عناية أكبر حتى يضمن عــدم انخفــاض دخلــه كثيــرا (الشكل II. 13. ب ).

3 ـ كثيرا ما لا يتماشى عرض العمل مع القانون المــذكور حيــث يضطر العامل أحيانا إلى زيادة ساعات العمل عندما ينخفض الأجر الحقيقي كما أن العامل قد يشعر بأهمية تخفيض ساعات العمل والراحــة إذا ارتفــع الأجر الحقيقي إلى مستوى معين ( الشكل II 13. ج ).



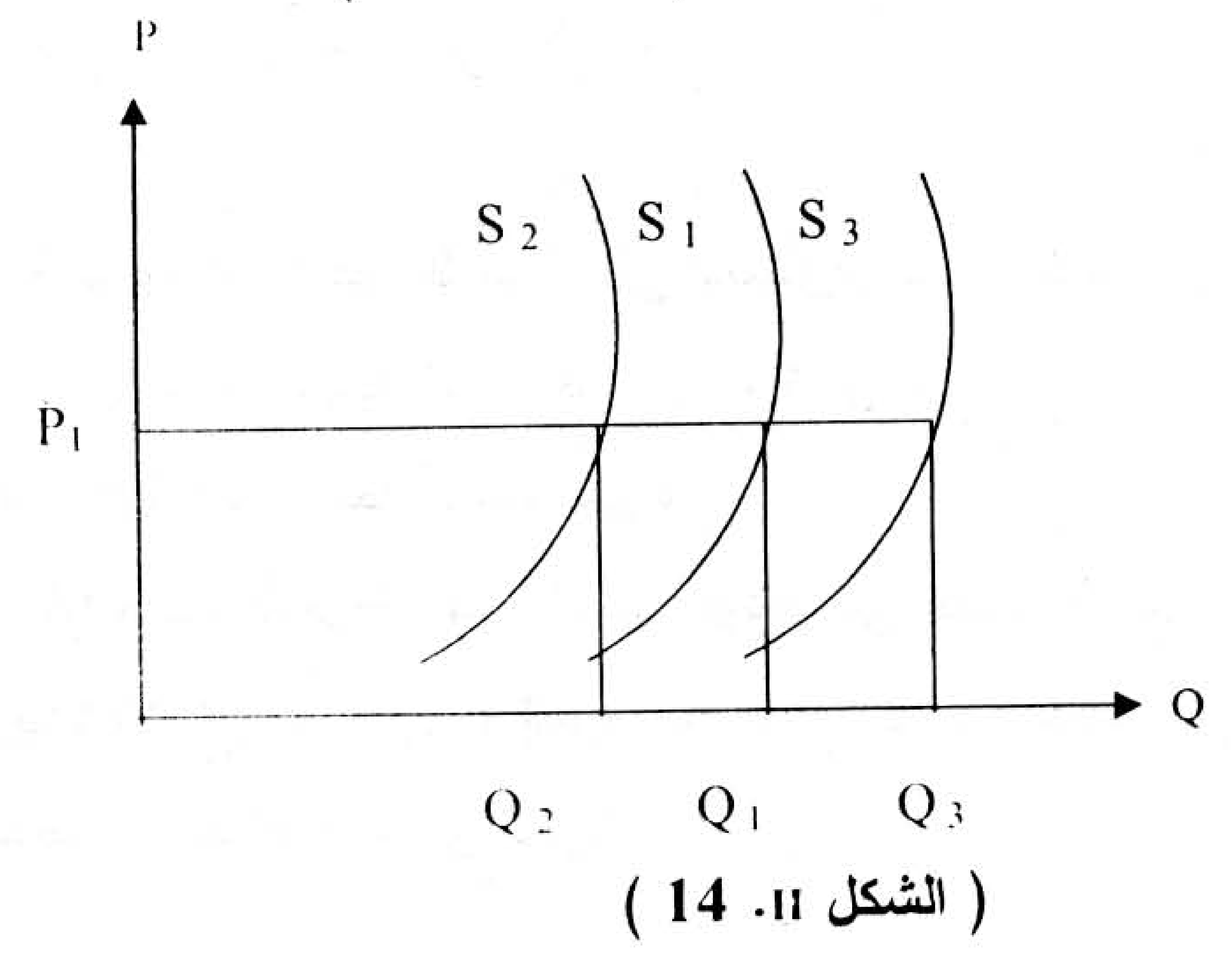

**( الشكل II. 13. ب )**

**3 – العوامل التي تؤثر في العرض بخلاف السعر (ظروف العرض).**

لكي ندرس العلاقة بين باقي العوامل بخلاف السعر والكمية المعروضة نثبت السعر.

إذا كان أثر العامل في صالح العرض فإن الكميات المعروضة تزيد عند نفس السعر ومنحنى العرض ينزاح يمنة.

إذا كان أثر العامل في غير صالح العرض فإن الكميات المعروضة تنقص عند نفس السعر وينزاح منحنى العرض يسرة، ويطلق على تغير العرض، عبارة، " تغير حالة العرض" ( الشكل II. 14 ).




**( الشكل II. 14 )**

ومن العوامل ما يأتي :

**1 – يعتمد عرض السلعة على أسعار السلع الأخرى.**

إذا اعتبرنا العوامل الأخرى ثابتة فإنه:

عندما ترتفع أسعار السلع الأخرى تجعل من إنتاج السلع الأخرى التي لم يرتفع سعرها أقل جاذبية مما كانت عليه من قبل ويتوقع نقصان عرضها.

وعندما تنخفض أسعار السلع الأخرى تجعل من إنتاج السلع التي لم ينخفض سعرها أكثر جاذبية عما كانت من قبل ويزيد عرضها.

**2 ـ يعتمد عرض السلعة على أسعار عوامل الإنتاج :**

إن ارتفاع أسعار عوامل الإنتاج يؤدي إلى ارتفاع نفقات الإنتاج مما يؤدي إلى تحول المنتجين من إنتاج السلع التي تستخدم كميات كبيرة من هذه العوامل إلى إنتاج السلع التي تستخدم كميات أقل مما يؤدي إلى نقص عرض السلعة الأولى ويزيد عرض السلعة الأخيرة ويكون الهدف من هذا التحول في الإنتاج هو المحافظة على الأرباح.

**3 ـ يعتمد عرض السلعة على المستوى السائد للمعرفة الفنية :**

إن ما ينتج وكيفية إنتاجه في أي فترة من الزمن يعتمدان على مستوى المعرفة الفنية السائدة خلال هذه الفترة.

فإذا كانت المعرفة الفنية السائدة تؤدي إلى خفض التكاليف فإنها تؤدي إلى زيادة الإنتاج ومنه زيادة العرض، أما إذا كانت التكاليف مرتفعة فتؤدي إلى تخفيض الإنتاج ونقصان العرض.

**4 ـ يعتمد عرض السلعة على المستوى الفني للإنتاج :**

فكلما كانت إنتاجية أحد عوامل الإنتاج مرتفعة كلما أدى ذلك إلى انخفاض تكاليف إنتاج الوحدة المنتجة وزيادة الأرباح مما يشجع المنتجين على زيادة إنتاجهم ومن ثم زيادة العرض، وكذلك العكس صحيح.

**<u>5 ــ الضرائب المفروضة من قبل الحكومة على الإنتاج</u> :**

إن فرض ضريبة على الإنتاج يؤثر على نفقات الإنتاج فإذا رفعت الحكومة من مستوى الضرائب ترتفع نفقات الإنتاج مما يؤدي بالمنتجين إلى إنقاص الإنتاج ومن ثم إنقاص الكمية المعروضة، وإذا خفضت الحكومة من مستوى الضرائب فإن هذا الإجراء يؤدي إلى انخفاض نفقات الإنتاج ومنه تشجيع المنتجين على زيادة الإنتاج ومن ثم زيادة الكميات المعروضة.

**<u>6 ــ دافع إعانات من قبل الحكومة لإنتاج وعرض سلعة معينة</u> :**

إن دفع الإعانات من قبل الحكومة أو الزيادة في الموجود منها يؤدي إلى زيادة الإنتاج وزيادة الكمية المعروضة وكذلك العكس صحيح.

**<u>ملاحظة</u>** : إن العوامل التي يفترض ثباتها في حالة العرض تختلف عن العوامل التي يفترض ثباتها في حالة الطلب. ويعد هذا فارقا بين ظروف الطلب وظروف العرض.

**<u>II ــ مرونة العرض:</u>** هي درجة استجابة العرض للتغير الحادث في أحد محددات العرض.

مرونة السعر/ العرض:

$$E_p = \frac{Q_s}{P} \cdot \frac{P}{Q_s}$$

وبالتقريب تصبح:

$$E_p = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s}$$

ومرونة السعر / العرض تكون دائما موجبة نتيجة العلاقة الطردية بين السعر والكمية المعروضة إلا في الحالات الإستثنائية حيث تكــون العلاقــة بينهما عكسية والإشارة سالبة.

**مثال** : إذا كانت دالة العرض.

$$Qs = 30P + 100$$

أحسب مرونة السعر العرض عندما يكون السعر $P = 10$

$$\frac{dQ_S}{dP} = 30$$

$$E_P = 30\frac{P}{30P+100} = \frac{30(10)}{30(10)+100} = \frac{300}{400} = \frac{3}{4}$$

$$E_P = 0,75 \langle 1$$

عرض قليل المرونة.

**1 ـ درجات المرونة :**

هي نفسها درجات المرونة بالنسبة للسعر/ الطلب.

1. عرض مرن $EP > 1$
2. عرض متكافئ ( تام المرونة ) $EP = 1$.
3. عرض قليل المرونة ( غير مرن ) $EP < 1$
4. عرض مرن تماما $EP = \alpha$
5. عرض عديم المرونة $EP = 0$

إن الحالات الثلاثة الأولى واقعية أما الحالتان الأخيرتان فهمـا غيـر واقعيتين والملاحظ أنه لا يوجد مغزى اقتصادي لمرونة العرض عموما، كما هو الحال بالنسبة للطلب الذي يرتبط بالإنفاق الكلي للمستهلكين وبـالإيراد.

الكلي كما يلاحظ أننا لم نتناول مرونة النقطة ومرونة القوس لأننا تعرضنا لهما في مرونة الطلب.

**2 ــ العوامل التي تؤثر في مرونة العرض :**

تختلف العوامل التي تؤثر في مرونة العرض باختلاف المدة موضع البحث.

**2. 1 ــ في المدة القصيرة جدا :**

المدة القصيرة جدا هي تلك المدة التي تكون من القصر بحيث لا تسمح بإحداث تغير في الكمية المعروضة عن طريق تغير حجم الإنتاج وإنما يتم التغير في الكميات المعروضة عن طريق التخزين بحيث : إذا كانت السلعة قابلة للتخزين فإن عرضها يكون مرنا. أما إذا كانت السلعة غير قابلة للتخزين فإن عرضها يكون غير مرن.

**2. 2 في المدة القصيرة :**

وهي المدة التي تسمح بالتغيير في حجم الإنتاج عن طريق التغيير في بعض عناصر الإنتاج ( العمل، المواد الأولية ) فإذا كان من الممكن التغيير في بعض عناصر الإنتاج فإن العرض يكون مرنا والعكس صحيح.

**2. 3 في المدة الطويلة :**

هي المدة التي تسمح بالتغيير في حجم الإنتاج عن طريق التغيير في كل عناصر الإنتاج ( العمل، رأس المال، الأرض ).

في المدة الطويلة تتوقف مرونة العرض على قابلية تنقل عناصر الإنتاج.

إذا كانت هذه العناصر قابلة للتنقل من فرع إنتاجي إلى فرع إنتـاجي آخر فإن العرض مرن.

أما إذا كانت هذه العناصر غير قابلة للتنقل فإن العرض غير مرن.

**III – بعض النظريات في المرونات** : بعد أن تعرضنا إلـى الطلـب والعرض والمرونات نتكلم عن بعض النظريات في المرونات.

1) **نظرية أولر للتجانس** : تنهي أن مجموع كل من مرونـة السـعر ومرونة التقاطع ومرونة الدخل تساوي صفر $EP + Exy + ER = O$

حيث تمثل x ، Y سلعتين غير مستقلتين.

EP : مرونة السعر / الطلب.

$E_{xy}$ : مرونة الجزئية التبادلية للطلب.

$E_R$ : مرونة الدخل / الطلب.

**2) شرط كونت الاجمالي** : إذا كان لدينا سلعتان هما : X، Y سعراهما على التوالي هما: $P_1$، $P_2$ والكميات المطلوبة منهما $Q_1$، $Q_2$ وما ينفق علـى السلعة X من الدخل هو $P_1$. $Q_1$ وما ينفق على السلعة Y من الدخل هـو: $P_2$. $Q_2$.

إذن عندما يكون الدخل R ينفق على السلعتين فإن قيد الميزانية يكـون على الشكل التالي: $R = Q_1 . P_1 + Q_2. P_2$

**وإذا فرضنا حدث تغير في سعر السلعة X فقط مع ثبات سعر السـلعة Y وثبات R فإن التفاضل الكلي لقيد الميزانية هو:**

$$dR = P_1\, dQ_1 + Q_1 d\, P_1 + P_2 do_2 = 0$$

وبالضرب في

$$\frac{P_1\ Q_1\ Q_2}{RQ_1\ Q_2\ dP_1}$$

ثم التغيير في بعض الحدود نحصل على

$\alpha_1\ E_{P1}\ +\alpha_2\ \ E_{YX}\ \ =-\alpha_1$ ( شرط كونت الإجمالي ).

حيث $\alpha_1 = \frac{Q_1\ P_1}{R_1}$ نسبة الإنفاق على السلعة X.

حيث $\alpha_2 = \frac{Q_2\ P_2}{R.}$ نسبة الإنفاق على السلعة X.

فإذا أعطينا ( أو توصلنا إلى معرفة ) مرونة السعر الخاصة بطلب السلعة X فإننا نستطيع تقييم المرونة الجزئية التبادلية للطلب على السلعة Y من خلال استخدام شرط كونت الإجمالي فمثلا:

إذا كانت $E_{P1} = -1$ فإن $E_{yx} = 0$ ( السلعتان مستقلتان ).

إذا كانت $E_{P1} < -1$ فإن $E_{yx} > 0$ ( السلعتان متنافستان ).

إذا كانت $E_{P1} > -1$ فإن $E_{yx} < 0$ ( السلعتان متكاملتان ).

**3 . شرط أنجل الإجمالي ( الخاصة التجميعية لإنجل ).**

لقد قلنا سابقا أن مرونة الدخل/ الطلب على السلعة ما هي:

$E_R = \frac{dQ}{dR}.\frac{R}{Q}$ على أساس باقي المحددات ثابتة.

فإذا كان لدينا سلعتان X، Y سعراهما على التوالي $P_1$, $P_2$ وكمياتهما $Q_1$ ، $Q_2$ والدخل R ينفق على السلعتين، فإن قيد الميزانية هو :

$$R = P_1\ Q_1 + P_2\ Q_2$$

التفاضـــل الكلـــي لقيـــد الميزانيـــة عنـــدما يتغيـــر R فقـــط هـــو $dR = P_1\, dQ_1 + P_2 dQ_2$ وبالضرب في R/ R وضرب الحد الأول في الطرف الأيمن للمعادلة في $Q_1$ /$Q_1$، وضرب الحد الثاني في $Q_2$/ $Q_2$ ثم القسمة على dR.

$$\frac{dR}{dR}=\frac{Q_1 P_1}{R}\left(\frac{dQ_1}{dR}.\frac{R}{Q_1}+\frac{P_2\ Q_2}{R}\frac{dQ_2}{dR}.\frac{R}{Q_2}\right)$$

$$\alpha_1.ER_X+\alpha_2.ER_Y=1$$ ( شرط إنجل الإجمالي )

ينص هذا الشرط على أن الدخل موازنة بنسب الإنفاق الكلية يســـاوي الوحدة.

<u>ملاحظة</u> : إذا كان الإنفاق على السلعة ما هو PQ فما هو معدل التغير الذي سوف يطرأ على الإنفاق بالنسبة للسعر.

معدل التغير الذي سوف يطرأ على الإنفاق بالنسبة للسعر.

$$\frac{\delta PQ}{\delta P}=Q+P\frac{\upsilon Q}{\partial P}=Q.(1+\frac{\upsilon Q}{\partial P}.\frac{P}{Q})$$

إذن:

$$\frac{\delta PQ}{\delta P}=Q.(1+E_P)$$

إذا نلاحظ من الصيغة الأخيرة ما يلي :

إذا كانت $Ep > -1$ فإن الإنفاق سوف يزداد مع زيادة السعر.

إذا كانت $Ep = -1$ فإن الإنفاق يظل ثابتا مع زيادة السعر.

إذا كانت $Ep < -1$ فإن الإنفاق يقل مع زيادة السعر.

<u>ملاحظة عامة:</u>

من التبسيط المفرط الاعتقاد بأن آثار جميع العوامـــل المـــؤثرة علـــى الطلب أو العرض يمكن استيعابها على منحنى الطلب أو العرض، أو انتقال

المنحنى بأكمله، لأن الطلب يخضع لعدة عوامل ترجع في جلها إلى البيئة من حيث العقيدة والتكافل الاجتماعي والأنماط الثقافية، وكذلك يخضع في إنتاج ما يعرض إلى العقيدة ومفهوم التنمية والمقومات الاجتماعية والثقافية، وسلوك عوامل الإنتاج الذي يخضع هو الأخير إلى السلوك البشري الخاضع إلى العقيدة والمقومات الاجتماعية والثقافية. لكن عند دراستنا للطلب والعرض حاولنا أن نجردهما بعض الشيء، وحاولنا أن نربطهما بمحددات انتقائية وذلك لدارسة العلاقة بين هذه المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة.



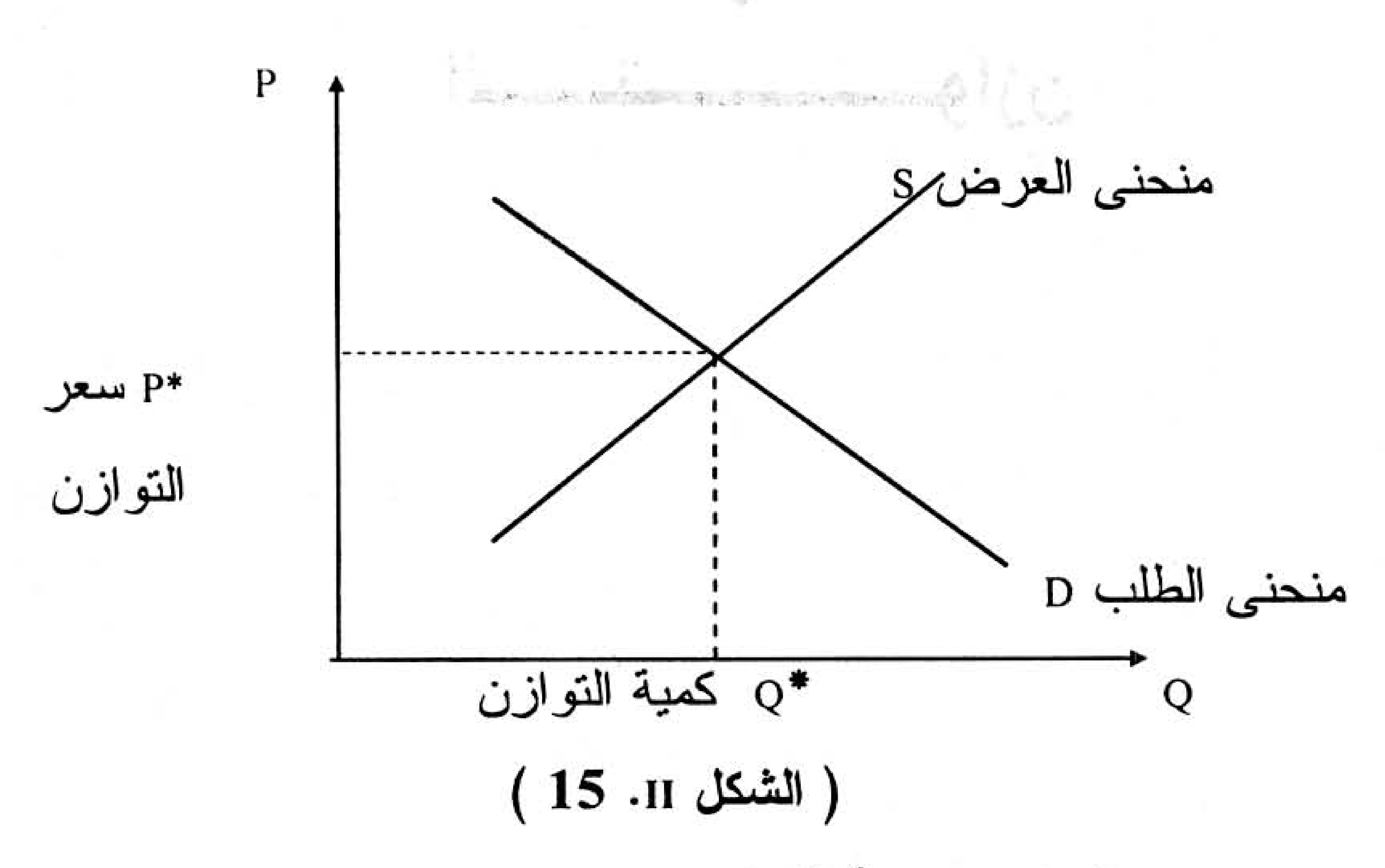
# الفصل الثالث

# التـــــــــــوازن

**I – التوازن** : يكون النموذج متوازنا إذا كانت المتغيرات التي يشملها قد اتخذت قيما معينة نتيجة التفاعل بينها ضمن المعادلات التي تكون النموذج بحيث يتحقق الإستقرار لهذه المتغيرات.

**سعر التوازن** : هو السعر الذي تتساوى عنده الكمية التي يكون المشترون مستعدين لشرائها من السلعة أو الخدمة مع الكمية التي يكون البائعون مستعدين لبيعها منها وتسمى تلك الكمية من السلعة بدورها بكمية التوازن. إذن يمكن تحديد سعر التوازن وكمية التوازن من تلاقي قوى العرض والطلب المشكلين للنموذج المتكامل المتوازن لسوق سلعة أو خدمة ما.

**1 – تحديد سعر التوازن وكمية التوازن بيانيا :**

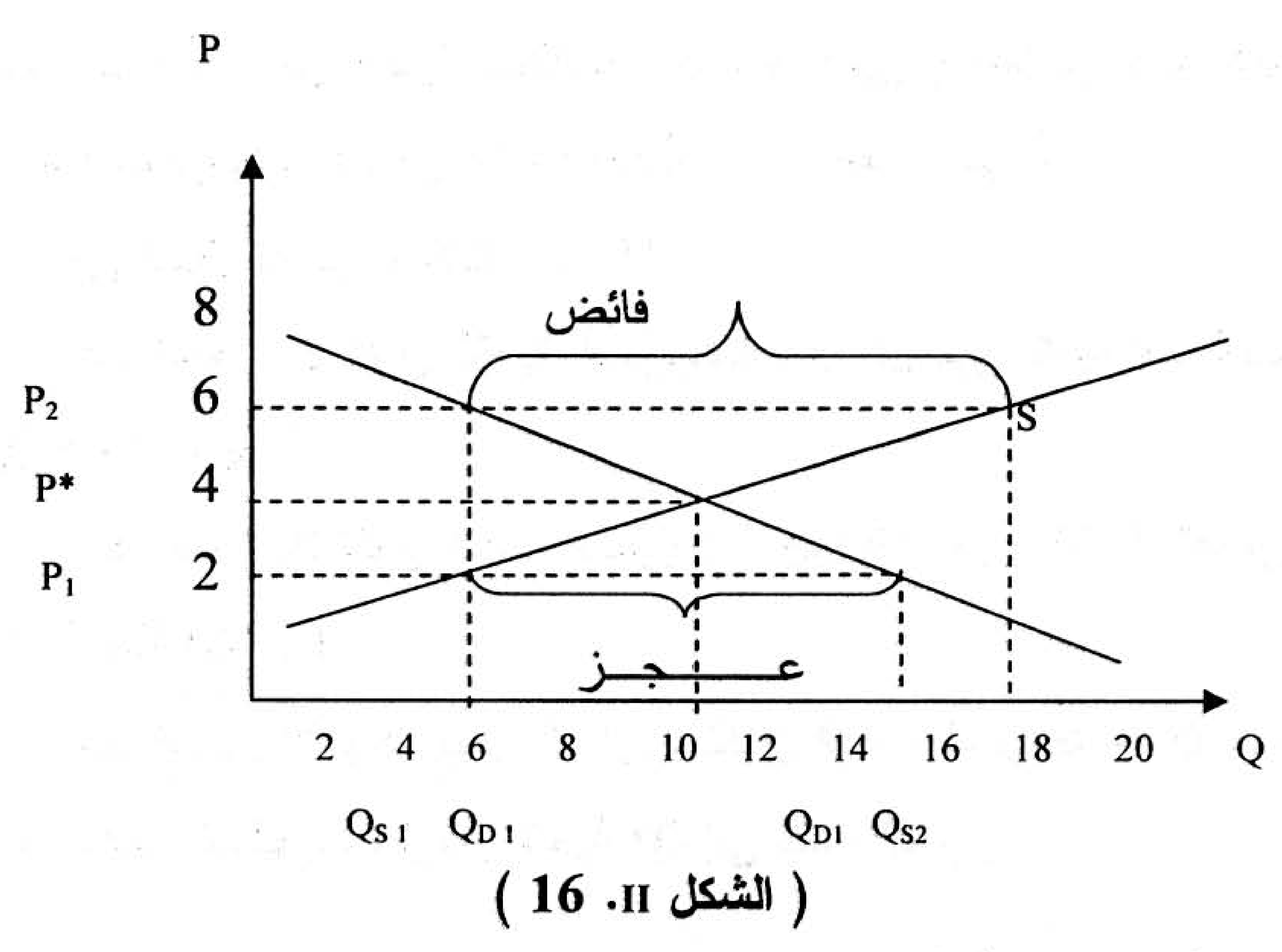



**( الشكل II. 15 )**

**تكون سعر التوازن وكمية التوازن :**

**مثال** : مثل بيانيا منحنى كل من الطلب والعرض الممثلين لجدول الطلب والعرض الآتي :

| السعر | الكمية المطلوبة | الكمية المعروضة |
|---|---|---|
| 6 | 6 | 17 |
| 5 | 8 | 13 |
| 4 | 10 | 10 |
| 3 | 13 | 7 |
| 2 | 15 | 3 |
| 1 | 18 | 0 |




**( الشكل II. 16 )**

يتكون سعر السلعة في السوق نتيجة لتلاقي دالة الطلب على هذه السلعة مع دالة عرضها، أي يخضع سعر السلعة لتأثير نوعين من القوى هما دالة الطلب ودالة العرض، والمفروض أن الدالتين مستقلتان تماما عن بعضهما بمعنى أن طلب المستهلكين للسلعة لا يتأثر بنشاط المنتجين لها وأن عرض هؤلاء المنتجين لا يتأثر بنشاط أولئك المستهلكين، كما يفترض

استقلال المشترين عن بعضهم في طلبهم وإستقلال البائعين عن بعضهم في عرضهم لهذه السلعة.

نفترض عند دراسة دالة الطلب أو دالة العرض كدالة للسعر ثبات ظروف الطلب وظروف العرض وعلى هذا الأساس نجد سعر واحد يتلاقى عنده جدول الطلب على سلعة مع جدول عرضها ويسمى هذا السعر بسعر التوازن حيث يحدد هذا الأخير كمية التوازن وهي الوحيدة أيضا عند هذا السعر مع ثبات ظروف الطلب وظروف العرض، أما عند باقي الأسعار لا يحدث التوازن وإنما يكون سوق هذه السلعة إما في حالة فائض ( الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة عند سعر معين ) وإما في حالة عجز (الكمية المعروضة أقل من الكمية المطلوبة عند سعر معين ).

في المثال السابق ( الشكل II. 16 ).

عند السعر $P_1$ تكون الكمية المعروضة $Q_{s1}$ أقل من الكمية المطلوبة $Q_{d1}$ ( حالة مجز ).

عند السعر $P_2$ تكون الكمية المعروضة $Q_{s2}$ أكبر من الكمية المطلوبة $Q_{d1}$ ( حالة فائض ).

عند السعر $P^*$ وهو سعر التوازن، تكون الكمية المعروضة $Q^*$ هي نفسها الكمية المطلوبة، وترمز الكمية $Q^*$ إلى كمية التوازن.

## <u>2 ـ تحديد سعر التوازن وكمية التوازن رياضيا</u> :

لقد قلنا سابقا في أول الكتاب بالمقدمة يفسر النموذج الإقتصادي ظاهرة إقتصادية معينة ويعبر عنها في صورة مجموعة من الدوال أو المعادلات تبين العلاقة بين عناصر الظاهرة الإقتصادية التي تتمثل بدورها في صورة

متغيرات. وقد يكون النموذج عبارة عن دالة أو معادلة واحدة فقط مثل دالـــة الطلب ودالة العرض.

لإيجاد سعر التوازن وكمية التوازن رياضيا نستخدم نموذجـــا خطيـــا لسوق سلعة معينة وللنماذج الخطية ميزة سهولة تقدير معلماتها كمـــا تتميـــز بتقريبها الجيد لدوال أكثر تعقيد.

يتكون النموذج الخطي لسوق سلعة معينة من ثلاث علاقات هي :

دالة الطلب : $Q_D = F(P) = a - bP$ حيث $b > 0$

دالة العرض : $Qs = f(p) = c + dP$ حيث $d > 0$

**شرط توازن النموذج ( توازن السوق ) :**

$$Q_D = Qs$$

إذن نموذج سوق سلعة معينة في حالة المنافسة التامة هو :

$$Qd = a - bp$$

$$Qs = c + dP$$

$$Q_D = Q_S$$

حيث a ، b ، c ، d معلمـــات النمـــوذج وحيـــث $0 < b$ ، $b > 0$ ، $d > O$ ، $P > O$ ، $Q > O$.

ويقال أن سوق سلعة تامة المنافسة ( كاملـــة المنافســـة ) إذا تحققـــت الشروط التالية :

1 ــ تجانس السلعة المنتجة.

2 ــ تعدد البائعين والمشترين بحيث لا يستطيع أحدهم بمفرده التـــأثير على الأسعار.

3 ــ توافر المعرفة التامة بأحوال السوق وخاصة بالسعر السائد.

4 ــ حرية البائعين والمشترين في دخول السوق أو الخروج منها.

**حل النموذج :**

**1 ــ الشرط اللازم للتوازن :**

يمكن حل نموذج سوق سلعة معينة في حالة منافسة تامة :

$$Q_D = a - bP$$

$$Qs = c + dP$$

باستخدام المعادلة الثالثة من النموذج $Q_D = Qs$ تلك المعادلة التي تبين حالة توازن النموذج، وبحل النموذج نحصل على سعر التــوازن $P^*$ وبعــد تعويض سعر التوازن في دالة الطلب أو دالة العرض فإننا نحصــل علــى الكمية التوازنية.

$$Q_D = Qs \Leftrightarrow a - bp = c + dP$$

ومن هذه المعادلة نحصل على سعر التوازن.

$$P^* = \frac{a-c}{d+b}$$

وبالتعويض عن سعر التوازن في دالة الطلب.

$$Q^*_D = a - b\left(\frac{a-c}{d+b}\right)$$

نحصل على الكمية التوازنية.

$$Q^* = \frac{ad+bc}{d+b}$$

**الشرط الكافي للحصول على قيم توازنية :**

إن الحل المقبول هو ذلك الحل الذي يعطي قيما موجبة للسعر والكمية حيث لا معنى لسعر سالب أو كمية سالبة.

إن شرط أن يكون سعر التوازن $P^*$ موجبا هو $c \geq 0 \;,\; a \rangle c$

**<u>مثال 1</u> :**

إذا كانت كل من دالة الطلب والعرض هما على التوالي :

$$Q_D = 250 - 50P$$

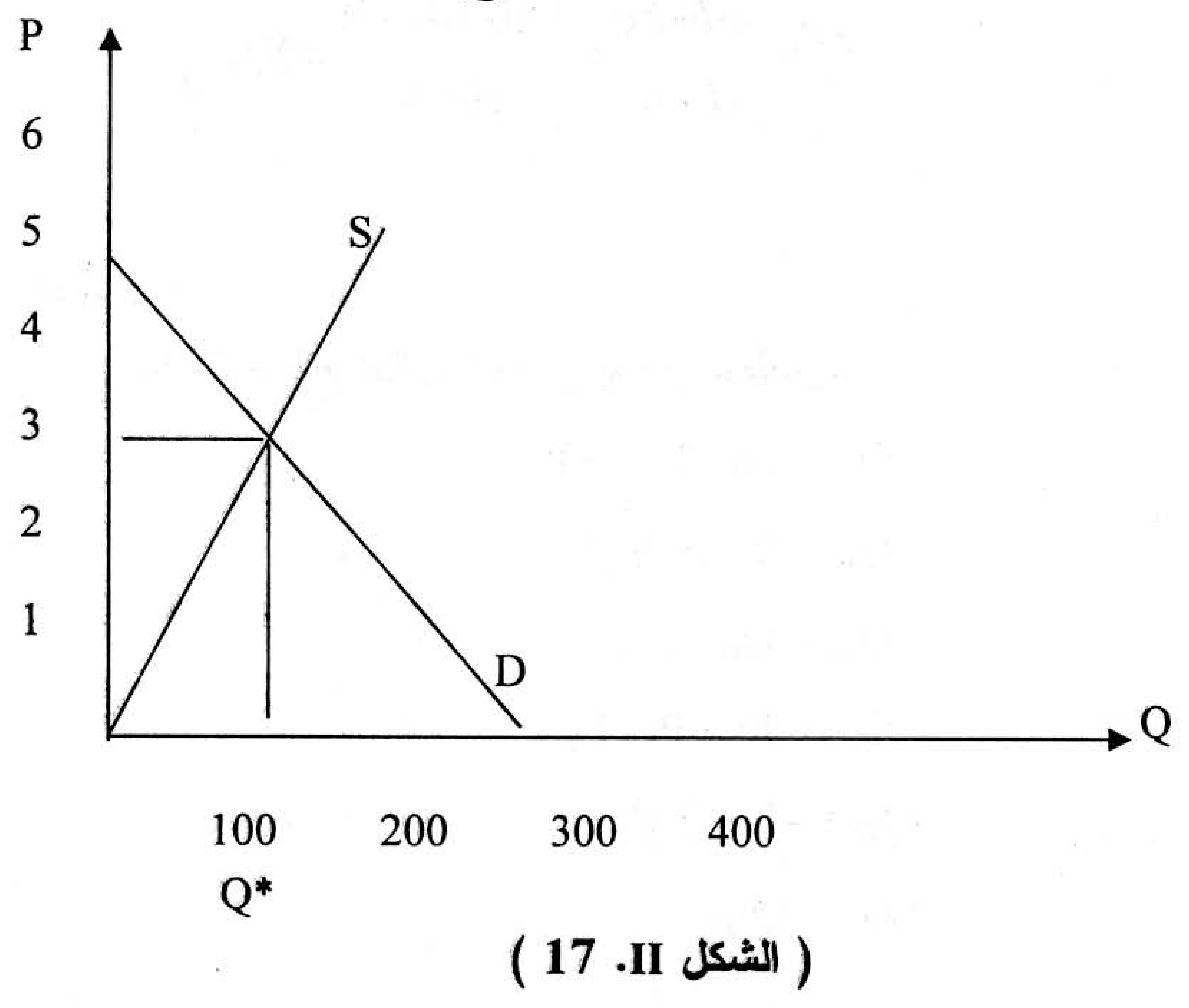
$$Q_D = \frac{100}{3}P$$

أحسب السعر التوازني والكمية التوازنية.

$$P^* = \frac{250}{\frac{100}{3}+50} = 3$$

$$Q^* = \frac{ad-bc}{d+b} = \frac{250 \times \frac{100}{3}}{\frac{100}{3}+50}$$

$$Q^* = 100$$




**( الشكل II. 17 )**

**مثال 2** : حل النموذج التالي الخاص بسوق سلعة معينة.

$$Q_D = 15 - 4P$$

$$Q_S = 6P - 1$$

$$Q_D = Q_S$$

تمثل المعادلتان الأولى والثانية معادلتين سلوكيتين هما معادلة الطلب ومعادلة العرض بينما تمثل المعادلة الثالثة معادلة توازنية. والمطلوب هو إيجاد السعر التوازني ثم العرض والطلب عند سعر التوازن أي إيجاد السعر التوازني والكمية التوازنية.

يتحقق التوازن عندما $Q_D = Q_S \Leftrightarrow 15 - 4P = 6P - 1$

إذن $P^* = \frac{a-c}{d+b} = \frac{15+1}{6+4}$

و $Q^* = \frac{ad+bc}{d+b} = \frac{156+4(-1)}{6+4} = 8.6$

**مثال 3** :

حل النموذج التالي الخاص بسوق سلعتين.

$$Q_{D1} = 10 - 2P_1 + P_2$$

$$Q_{s1} = -2 + 3P_1$$

$$Q_{D1} = Q_{s1}$$

$$Q_{D2} = 15 + P_1 - P_2$$

$$Q_{s2} = -1 + 2P_2$$

$$Q_{D2} = Q_{s2}$$

إن هذا النموذج خاص بسوق سلعتين معا ويبدو مـــن الإشـــارات أن هاتين السلعتين متنافستين حيث للطلب على السلعة الأولى علاقة موجبة مع سعر السلعة الثانية وكذلك للطلب على السلعة الثانية علاقة موجبة مع ســعر السلعة الأولى. وحل النموذج يعني تحديد سعري الســلعتين عنــد التــوازن وكذلك طلبيهما وعرضيهما.

يتحقق التوازن عندما.

$$Q_{D1} = Q_{S1} \Leftrightarrow 10 - 2P_1 + P_2 = 2 + 3P_1$$

$$Q_{D2} = Q_{S2} \Leftrightarrow 15 + P_1 - P_2 = -1 = 2P_2$$

أي

$$-5P_1 + P_2 = -12 \qquad (1)$$

$$P_1 - 3P_2 = -16 \qquad (2)$$

بضرب طرفي المعادلة ( 1 ) في 3 تصبح الجملة.

$$-15P_1 + 3P_2 = -36$$

$$P_1 - 3P_2 = -16$$

وبالجمع بين المعادلتين نحصل على:

$$-14P_1 = -52$$

إذن:

$$P_1 = \frac{26}{7}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$-5(\frac{26}{7}) + P_2 = -12$$

$$P_2 = \frac{46}{7}$$

$$Q_{D1} = Q_{S1} = 10 - 2P_1 + P_2$$

$$= 10 - 2(\frac{26}{7}) + \frac{46}{7} = \frac{64}{7}$$

$$Q_{D2} = Q_{S2} = 15 + P_1 - P_2$$
$$= 15 + \frac{26}{7} - \frac{46}{7} = \frac{85}{7}$$

**مثال 4**: حل النموذج التالي:

$$P = 12 - 5Q_D$$
$$P = 4 + 4Q_S$$
$$Q_D = Q_S$$

لدينا النموذج:

$$\left.\begin{aligned} Q_D &= \frac{12}{5} - \frac{1}{5}P \\ Q_S &= -1 + \frac{1}{4}P \end{aligned}\right\} 9\; Q_D = Q_S$$

$$P^* = \frac{a-c}{d+b} = \frac{\frac{12}{5}+1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{17}{5}}{\frac{9}{20}}$$

$$P^* = \frac{17}{5} \times \frac{20}{9} = \frac{68}{9}$$

$$Q^* = \frac{ad+bc}{d+b} = \frac{\frac{12}{5}.\frac{1}{4} + \frac{1}{5}.(-1)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}$$

$$Q^{*} = \frac{2/5}{9/20} = \frac{2}{5} \cdot \frac{20}{9} = \frac{8}{9}$$

نلاحظ أن التوازن السابق يقتضي أن تكون جميع هذه المتغيرات في حالة استقرار وثبات ويسمى هذا التوازن بالتوازن الساكن، إذن ما هو التوازن الساكن ؟

**II – التوازن الساكن** : يقوم هذا النوع من التوازن على افتراض إمكانية الوصول إلى وضع توازني تستقر عنده جميع المتغيرات وبذلك يتجه الإهتمام في دراسة التوازن الساكن نحو تحديد قيم المتغيرات الداخلية التي يتحقق عندها التوازن وتهمل الحركة الواقعية التي تأخذها هذه المتغيرات في تغيرها.

إذن تصور النماذج الساكنة العلاقات الخطية التي تحدث بين المتغيرات الإقتصادية في لحظة معينة.

**III – أثر حالات الطلب وحالات العرض على الوضع التوازني (التحليل الساكن المقارن):**

في ما سبق من التوازن اقتصرت دراستنا على التوازن في السوق من وجهة نظر سكونية حيث يستمر التوازن سائد في السوق طالما أنه لم يحدث أي تغير في متغير أو أكثر من المتغيرات التي تؤثر في الطلب والعرض من غير سعر السلعة. ومعنى هذا أننا اعتبرنا ظروف الطلب وظروف العرض ثابتة عند تحليلنا وهذا لا يمثل الواقع. لهذا نحاول أن نقترب بعض الشيء من عالم الواقع وندرس ما يطرأ على الأوضاع التوازنية إذا تغيرت ظروف العرض والطلب في السوق ويعرف هذا الأخير بالتحليل الساكن المقارن.

**التحليل الساكن المقارن** : عند تغيـر ظـروف الطلـب أو ظـروف العرض يتغير الوضع التوازني وتسمى مقارنة الوضع التوازني الأصلي مع الوضع التوازني الجديد بالتحليل الساكن المقارن حيث ينصب هذا التحليـل على المقارنة وليس على الوقت اللازم للإنتقال ولا على مسار التغير خـلال الزمن من الوضع التوازني الأصلي إلى الوضع التوازني الجديد. وندرس في التحليل الساكن المقارن ما يلي :

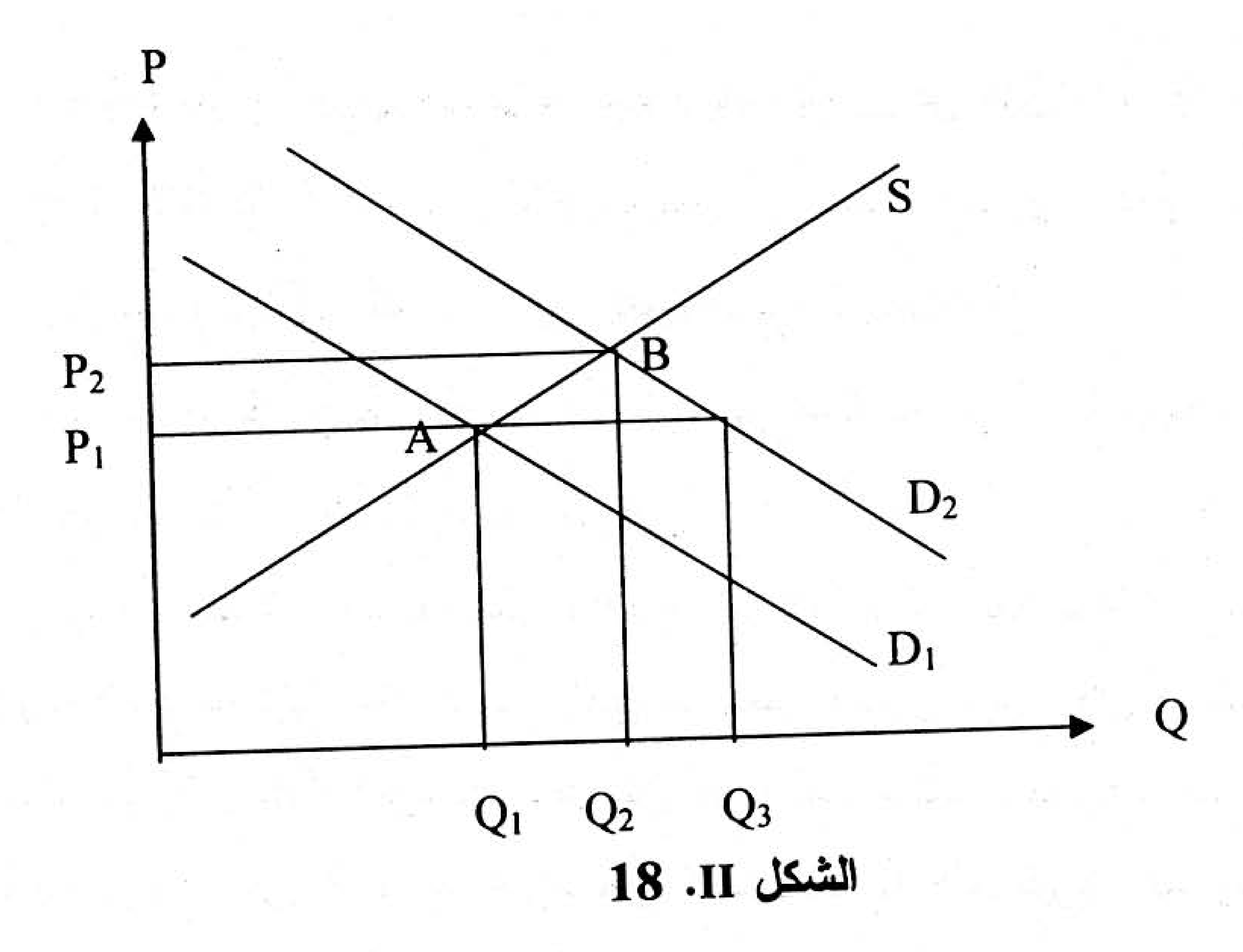
- تغير حالة الطلب مع ثبات حالة العرض.
- تغير حالة العرض مع ثبات حالة الطلب.
- تغير حالة الطلب وحالة العرض معا.

**1 ـ تغير حالة الطلب مع ثبات حالة العرض :**

نفترض ثبات حالة العرض وتغير حالة الطلب ( تغير حالة الطلـب ) بسبب تغير أحد محددات الطلب من غير سعر السلعة. ولنبـدا أولا بتغيـر ظروف الطلب بالزيادة ثم ننتقل ثانيا إلى تغير ظروف الطلـب بالنقصـان. والجدير بالذكر أن نذكر بأننا نستخدم الخطوط المستقيمة بدل المنحنيات وهذا للتبسيط.

**1. 1 ـ زيادة الطلب مع ثبات العرض:**

ـ إن زيادة الطلب تؤدي إلى نقل منحنى الطلب بأكمله إلـى اليمـين (أنظر الشكل رقم 1، 18 ).




**الشكل II. 18**

يبين الشكل أن نقطة التوازن الأصلية هي A وأن سعر التوازن الأصلي هو $P_1$ الذي تقابله كمية توازنية هي $Q_1$.

بعد زيادة الطلب أصبحت الكمية المطلوبة عند السعر $P_1$ هي $Q_3$ وبالتالي يوجد فائض في الطلب مقداره $\Delta Q = Q_3 - Q_1$ حيث يؤدي الفائض في الطلب إلى ارتفاع السعر ويصبح $P_2$ وعند السعر $P_2$ تتعادل الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة.

إذن نقطة التوازن الجديدة هي B وسعر التوازن الجديد هو $P_2$ وكمية التوازن الجديد هي $Q_2$ .

إذن نلاحظ أن زيادة الطلب مع ثبات العرض أدت إلى زيادة سعر التوازن والكمية التوازنية.

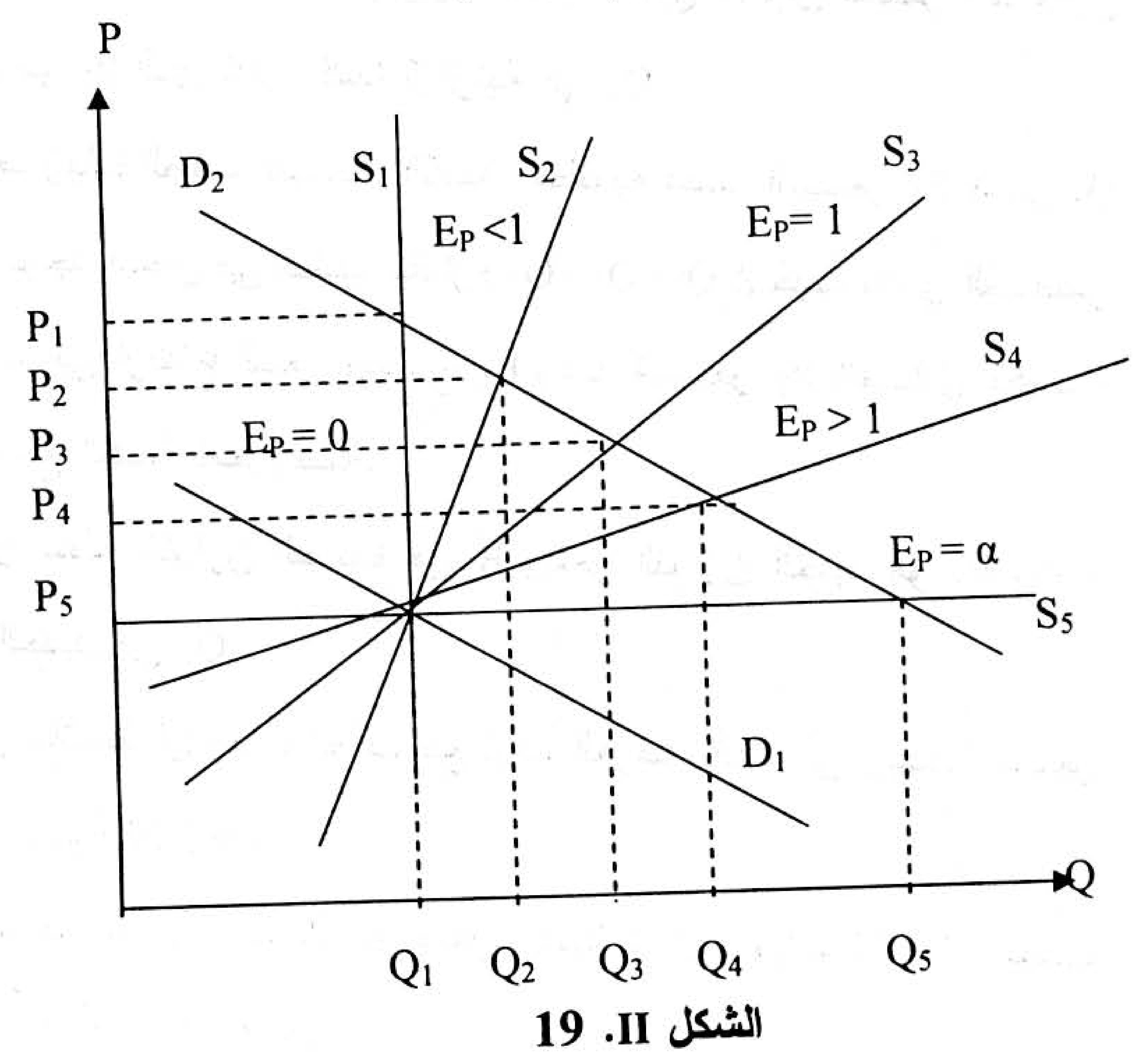
ويتوقف معدل زيادة كل من سعر وكمية التوازن في حالة زيادة الطلب على المرونة السعرية للعرض.

**أثر المرونة السعرية للعرض على كل من سعر وكمية التوازن في حالة زيادة الطلب :**

ـ عندما تكون المرونة السعرية للعرض مساوية للصفر يرتفع سعر التوازن بشدة ولا تتأثر كمية التوازن بالزيادة في الطلب.

ـ عندما تكون المرونة السعرية للعرض مساوية إلى ما لا نهاية تزداد كمية التوازن بشدة ولا يتأثر سعر التوازن.

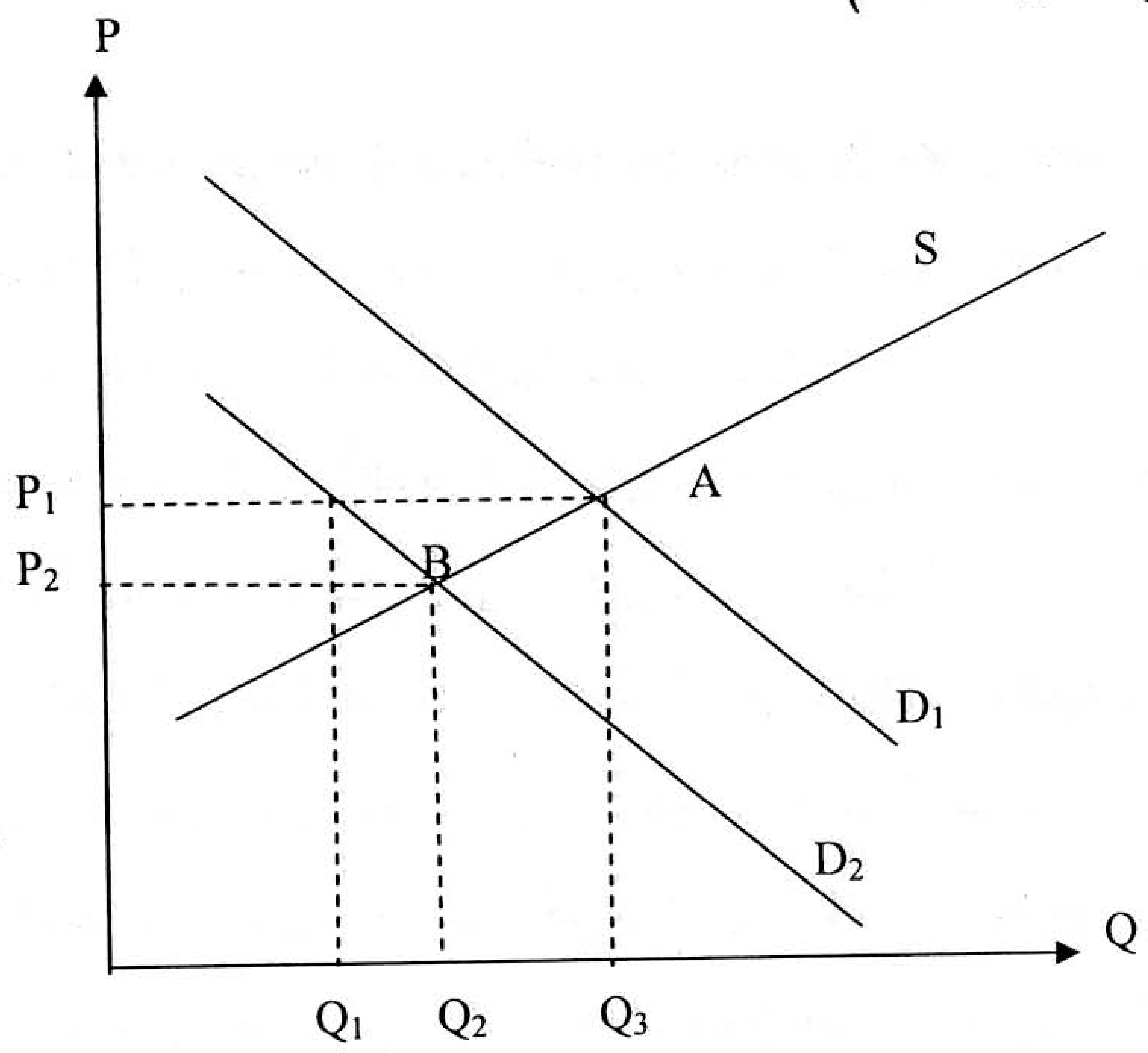
ـ إن الحالات السابقة غير واقعية، أما الحالات الثلاثة الأخرى للمرونة السعرية التي تمثل الواقع وهي عرض مرن، عرض متكافئ المرونة، عرض قليل المرونة تجعل من أثر زيادة الطلب يختلف حسب اختلاف درجة المرونة السعرية للعرض حيث نجد أنه كلما كبرت المرونة السعرية للعرض كلما كان معدل ارتفاع سعر التوازن أقل ومعدل زيادة كمية التوازن أكبر ( أنظر الشكل رقم II، 19 ).




**الشكل II. 19**

**1. 2 ـ نقصان الطلب مع ثبات العرض :**

إن نقصان الطلب يؤدي إلى نقل منحنى الطلب بأكملـــه إلـــى اليســـار (أنظر الشكل II. 20 ).




**الشكل II. 20**

يبين الشكل أن نقطة التوازن الأصلي هي A وسعر التوازن هـــو $P_1$ وكمية التوازن هي $Q_1$.

بعد نقصان الطلب أصبحت الكمية المطلوبة أقل من الكمية المعروضة ويعني هذا وجود فائض في العرض مما يدفع بالعارضين إلى تخفيض السعر من أجل امتصاص هذا الفائض. وبعد التفاعل بين قوى الطلـــب والعـــرض تظهر نقطة جديدة هي B وسعر التوازن هو $P_2$ وكمية توازن جديدة هي $Q_2$.

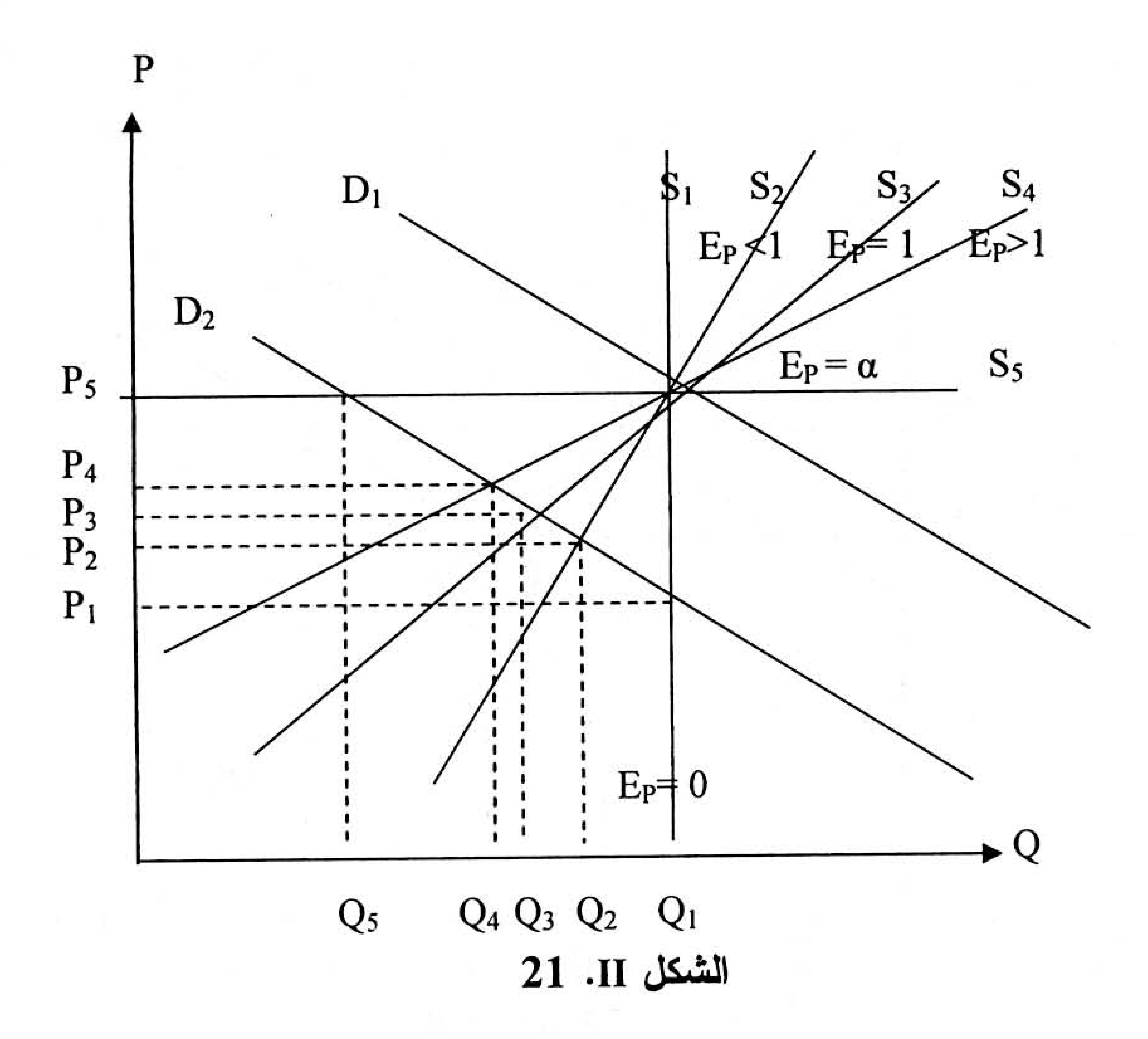
إذن نلاحظ أن نقصان الطلب مع ثبات العرض أدى إلى نقصان سعر التوازن والكمية التوازنية. ويتوقف معدل نقصان كل من سعر التوازن والكمية التوازنية على المرونة السعرية للعرض.

**أثر المرونة السعرية على سعر التوازن والكمية التوازنية في حالة نقصان الطلب :**

عندما تكون المرونة السعرية للعرض مساوية للصفر ينخفض سعر التوازن بشدة ولا تتأثر الكمية التوازنية بنقصان الطلب.

عندما تكون المرونة السعرية للعرض مساوية إلى ما لا نهاية تنخفض الكمية التوازنية بشدة ولا يتأثر سعر التوازن بنقصان الطلب.

إن الحالات السابقة هي حالات تطرف أما في الحالات الواقعية يختلف أثر المرونة السعرية على سعر التوازن والكمية التوازنية حسب درجة المرونة السعرية للعرض، حيث كلما كبرت المرونة السعرية للعرض كلما كان معدل نقصان سعر التوازن أقل ومعدل نقصان كمية التوازن أكبر ( أنظر الشكل رقم II. 21 ).



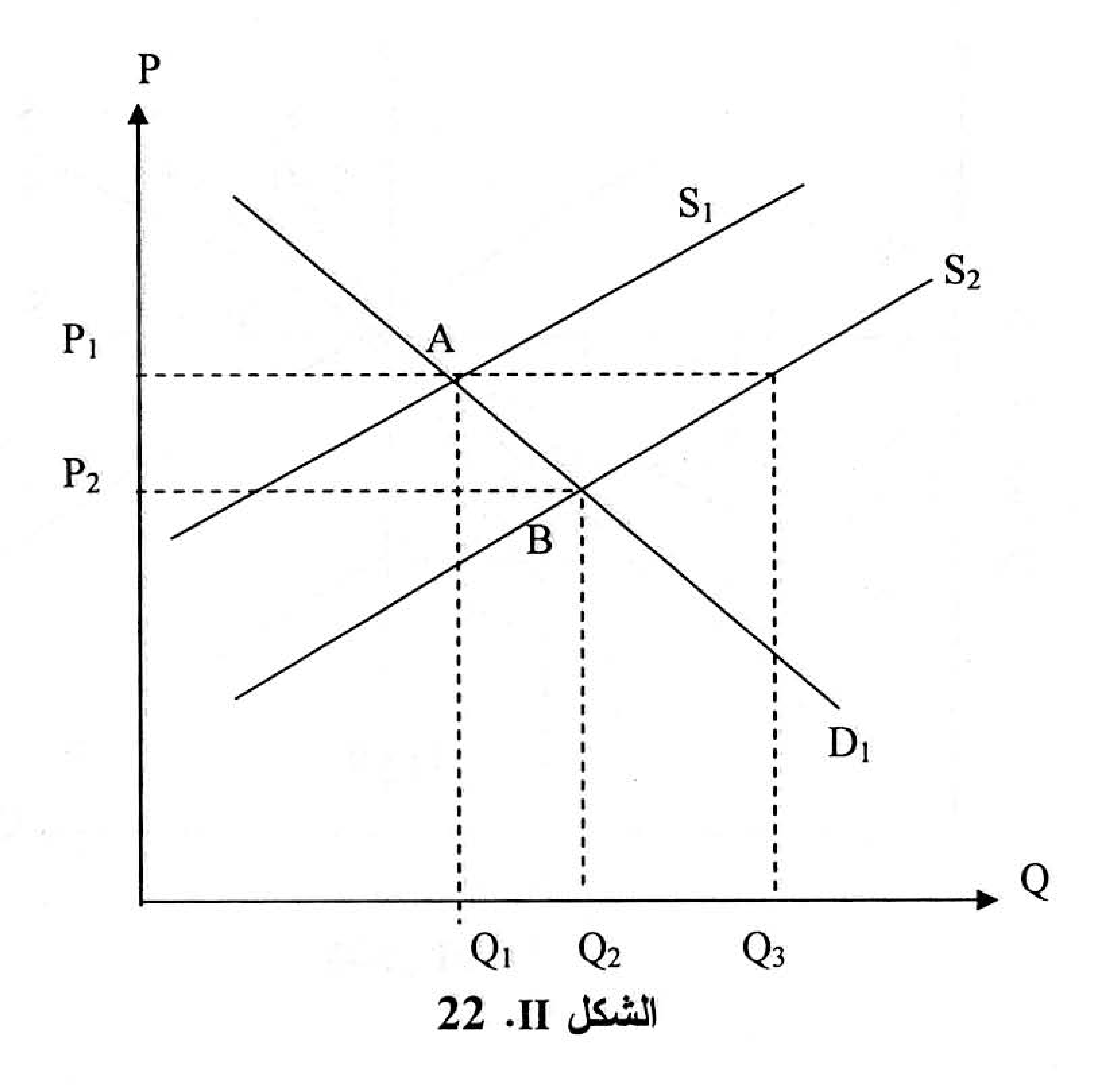

**الشكل II. 21**

## 2 ـ تغير حالة العرض مع ثبات حالة الطلب :

ـ نفرض ثبات حالة الطلب ونفرض تغير حالة العرض بتغيــر أحــد محدداته أو أكثر من محدد بخلاف سعر السلعة ونبدأ بزيادة العرض ثم بعــد ذلك ننتقل إلى نقصانه.

### 2. 1 ـ زيادة العرض مع ثبات الطلب :

إن زيادة العرض تؤدي إلى نقل منحنى العرض إلى اليمــين ( أنظــر الشكل رقم II. 22 ).




**الشكل II. 22**

يبين هذا الشكل نقطة التوازن الأصلية A والسعر التوازني $P_1$ والكمية التوازنية $Q_1$ وبعد زيادة العرض نتيجة تغيره في ظروف العرض أصبحت الكمية المعروضة هي $Q_3$ أي يوجد فائض في العرض مما يدفع بالعارضين إلى تخفيض السعر لامتصاص الفائض وبتفاعل قوى الطلب والعرض تظهر نقطة توازنية جديدة B وسعر توازني جديد $P_2$ تقابله كمية توازنية $Q_2$.

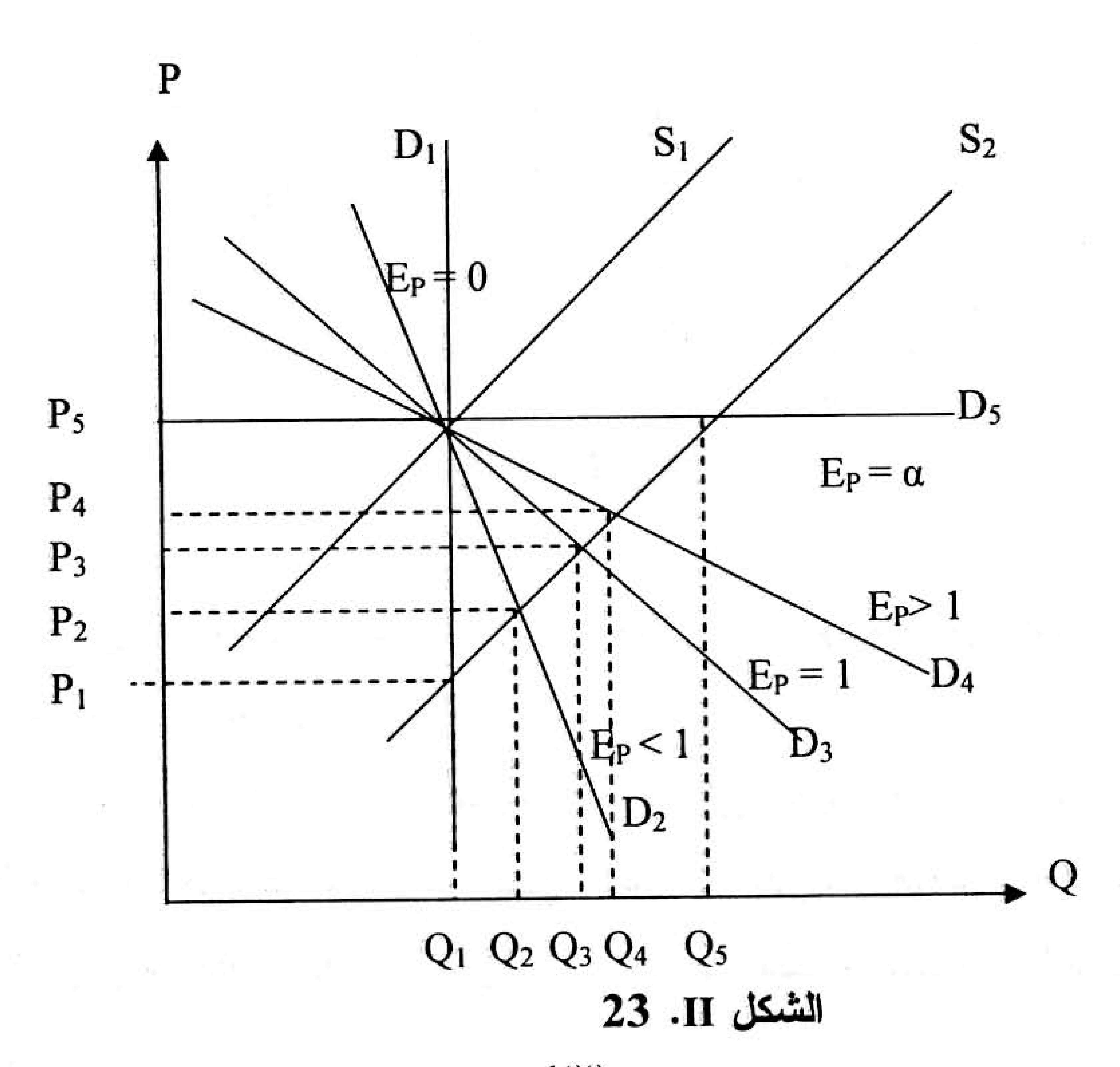
إذن نلاحظ أن زيادة العرض مع ثبات الطلب أدت إلى انخفاض سعر التوازن وزيادة الكمية التوازنية، ويتوقف معدل انخفاض سعر التوازن وزيادة الكمية التوازنية في حالة زيادة العرض على المرونة السعرية للطلب.

## أثر المرونة السعرية للطلب على سعر التوازن والكمية التوازنية في حالة زيادة العرض:

عندما تكون المرونة السعرية للطلب مساوية للصفر ينخفض سعر التوازن بشدة ولا تتأثر كمية التوازن.

ـ عندما تكون المرونة السعرية للطلب مساوية إلى ما لا نهاية تزداد الكمية التوازنية بشدة ولا يتأثر سعر التوازن.

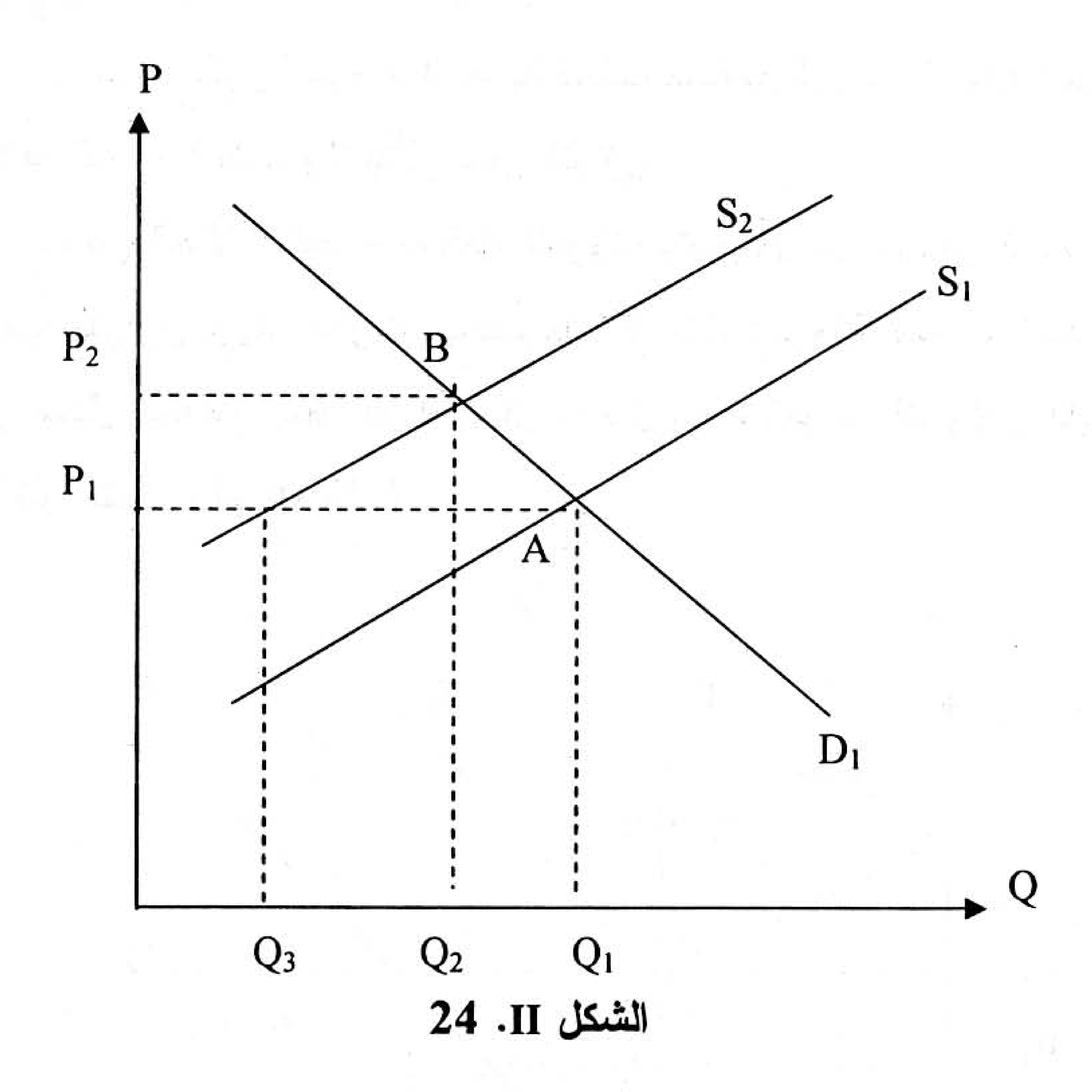
ـ في الحالات الثلاثة الواقعية للمرونة يتغير كل من سعر التوازن وكمية التوازن بزيادة العرض بحيث كلما ازدادت المرونة السعرية للطلب كان معدل انخفاض سعر التوازن أقل ومعدل زيادة كمية التوازن أكبر ( أنظر الشكل رقم II، 23 ).




**الشكل II. 23**

## 2 .2 ) نقصان العرض مع ثبات الطلب :

في حالة نقصان عرض سلعة مع ثبات طلبها ينتقل منحنى العرض إلى اليسار ( أنظر الشكل رقم II. 24 ).




**الشكل II. 24**

يبين هذا الشكل النقطة التوازنية الأصلية A وسعر التوازن الأصلي $P_1$ والكمية التوازنية $Q_1$.

عندما ينقص العرض عند نفس السعر إلى الكمية $Q_3$ يظهر عجز في العرض وفائض في الطلب مما يدفع بالسعر إلى الإرتفاع فيصبح السعر التوازني هو $P_2$، والكمية التوازنية هي $Q_2$ أما نقطة التوازن الجديدة فهي B.

إذن نلاحظ أن نقصان العرض مع ثبات الطلب أدى إلى ارتفاع السعر التوازني وانخفاض الكمية التوازنية، ويتوقف معدل ارتفاع السعر التوازني ومعدل انخفاض الكمية التوازنية على المرونة السعرية للطلب. والجدير بالذكر هنا أننا نترك أثر المرونة السعرية للطلب عندما ينقص العرض إلى الدارس ( الطالب ) كتمرين يقوم بحله.

**3 ـ تغير حالة الطلب والعرض معا :**

يختلف أثر تغير الطلب والعرض معا وفي نفس الوقت على السعر التوازني والكمية التوازنية حسب ما إذا كان تغيرهما في اتجاه واحد أم في اتجاهين متعارضين.

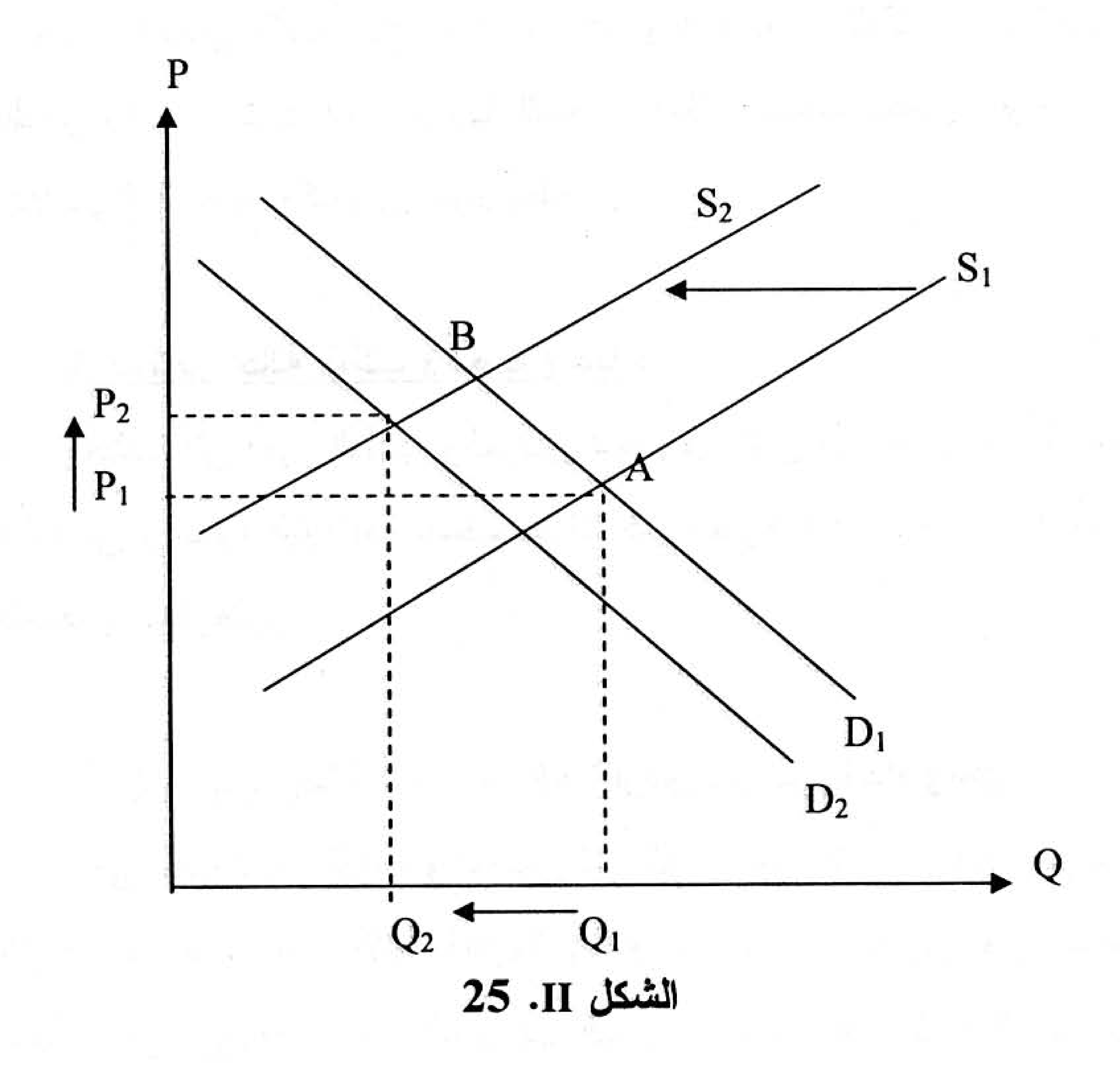
**3. 1 ـ تغير حالة الطلب وحالة العرض معا في اتجاه واحد :**

في حالة تغير الطلب والعرض في اتجاه واحد فإنهما يؤثران في كمية التوازن في نفس هذا الإتجاه لكنهما يؤثران في السعر التوازني في اتجاهين متعارضين. ويتوقف إتجاه التغير في السعر التوازني على القوة النسبية لكل من التغير في حالة الطلب والتغير في حالة العرض، وهنا سنتعرض لست حالات:

**أولا : نقصان الطلب أقل من نقصان العرض :**

بما أن النقص في الكميات المعروضة من السلعة أكبر من مقدار النقص في الكميات المطلوبة منها فهذا يعني وجود فائض في الطلب على السلعة عند سعر التوازن الأصلي لأن الكمية المطلوبة تصبح أكبر من الكمية المعروضة. ولتشجيع المنتجين أو نتيجة لتنافس المستهلكين يرتفع السعر ويستمر في الإرتفاع إلى أن يتحقق التوازن الجديد في النقطة B حيث

سعر التوازن الجديد أكبر من سعر التوازن الأصلي وكمية التوازن الجديدة أقل من كمية التوازن الأصلية ( أنظر الشكل رقم II. 25 ).



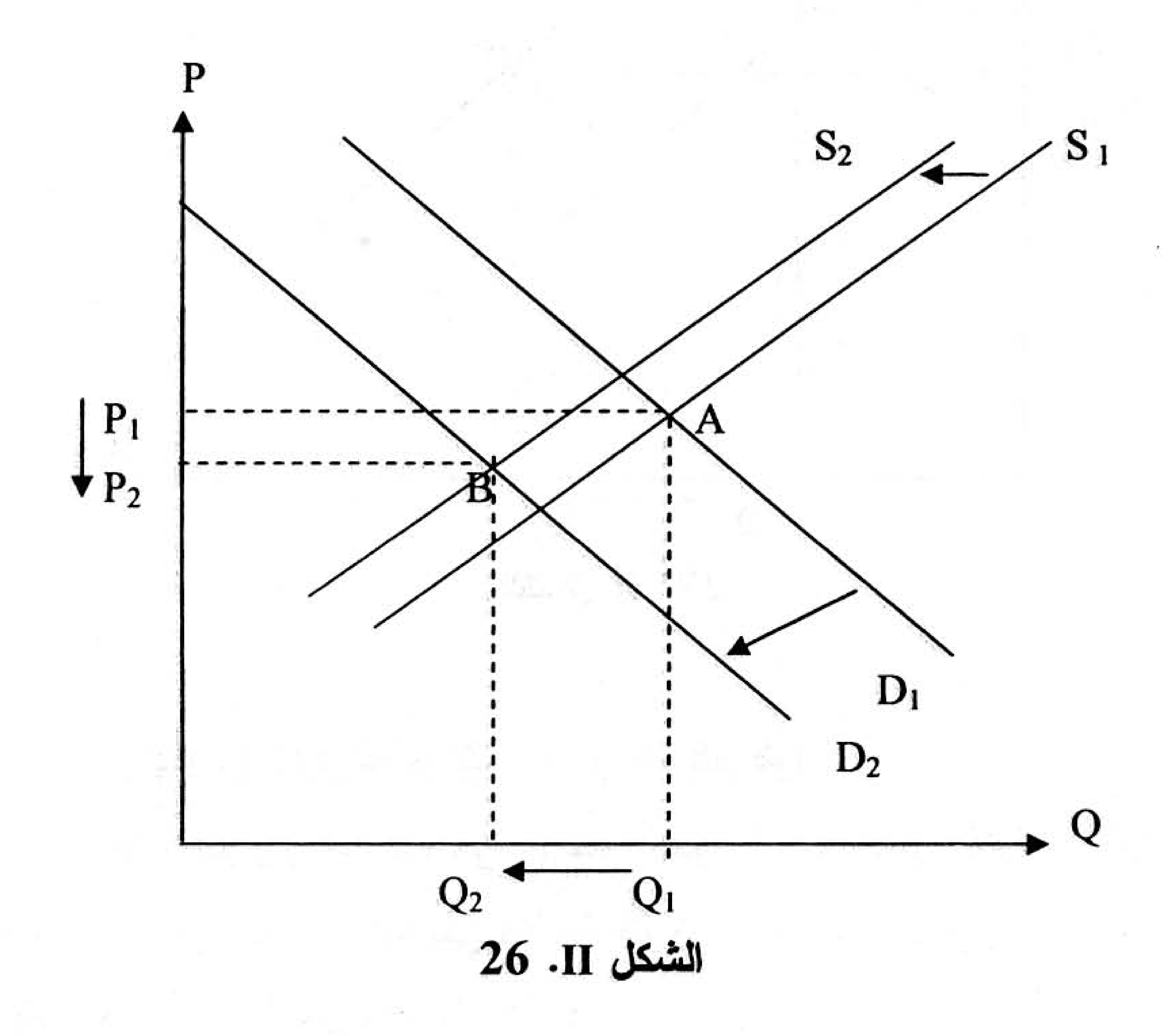

**الشكل II. 25**

نقصان العرض أكبر من نقصان الطلب أي تغير العرض بالنقصان أقوى من تغير الطلب بالنقصان.

<u>ملاحظة</u> : في باقي الحالات أقدم النتيجة دون التحليل وعلى الـــدارس إتمام التحليل كتمرين يقوم به.

**ثانيا : نقصان الطلب أكبر من نقصان العرض :**

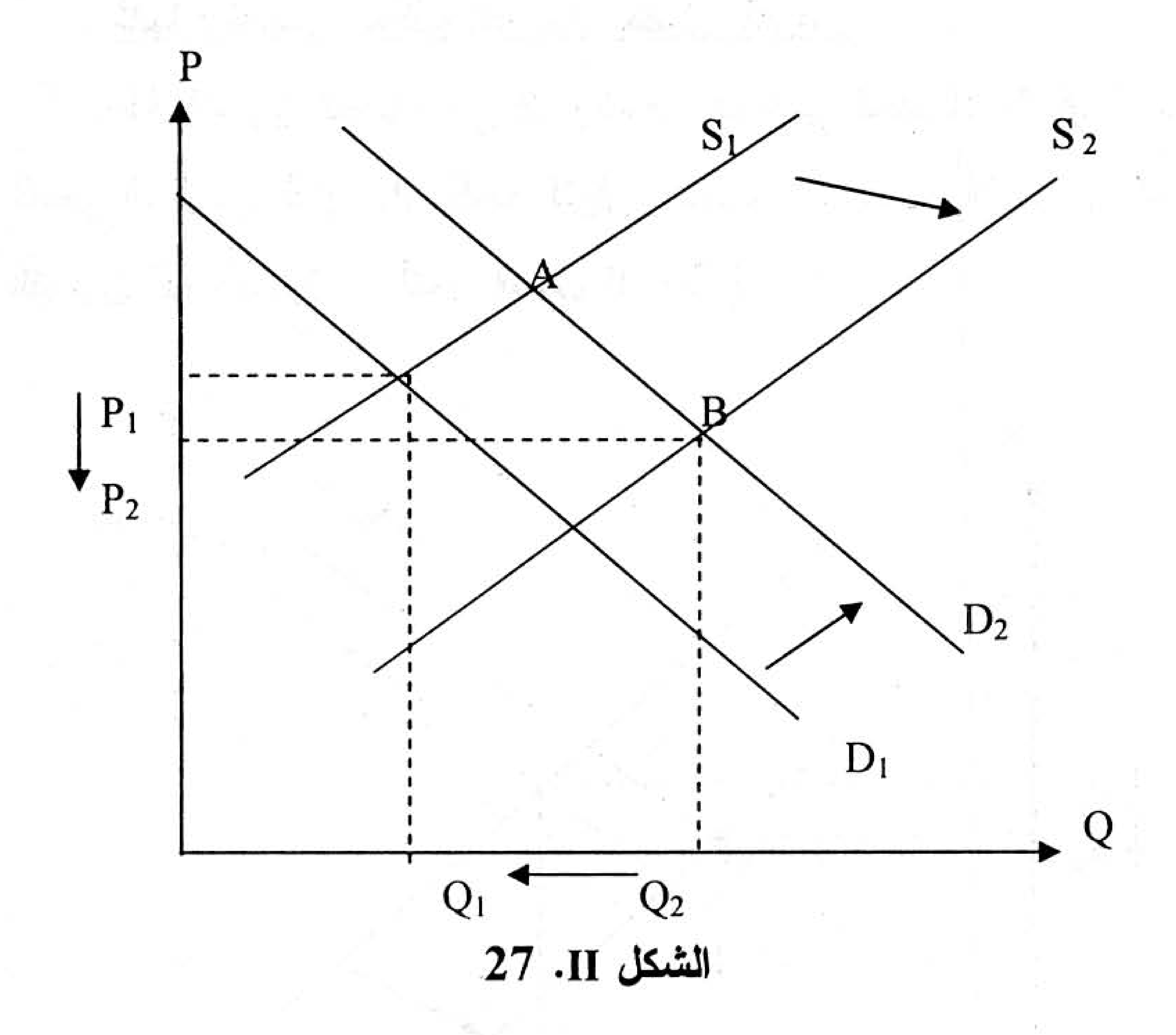
نقطة التوازن الجديدة هي B، والسعر التوازني الجديد $P_2$ أقل من السعر التوازني القديم $P_1$ وكمية التوازن الجديدة $Q_2$ تكون أقل من كمية التوازن الأصلية $Q_1$. ( أنظر الشكل II. 26 ).




**الشكل II. 26**

**ثالثا : زيادة الطلب أقل من زيادة العرض :**

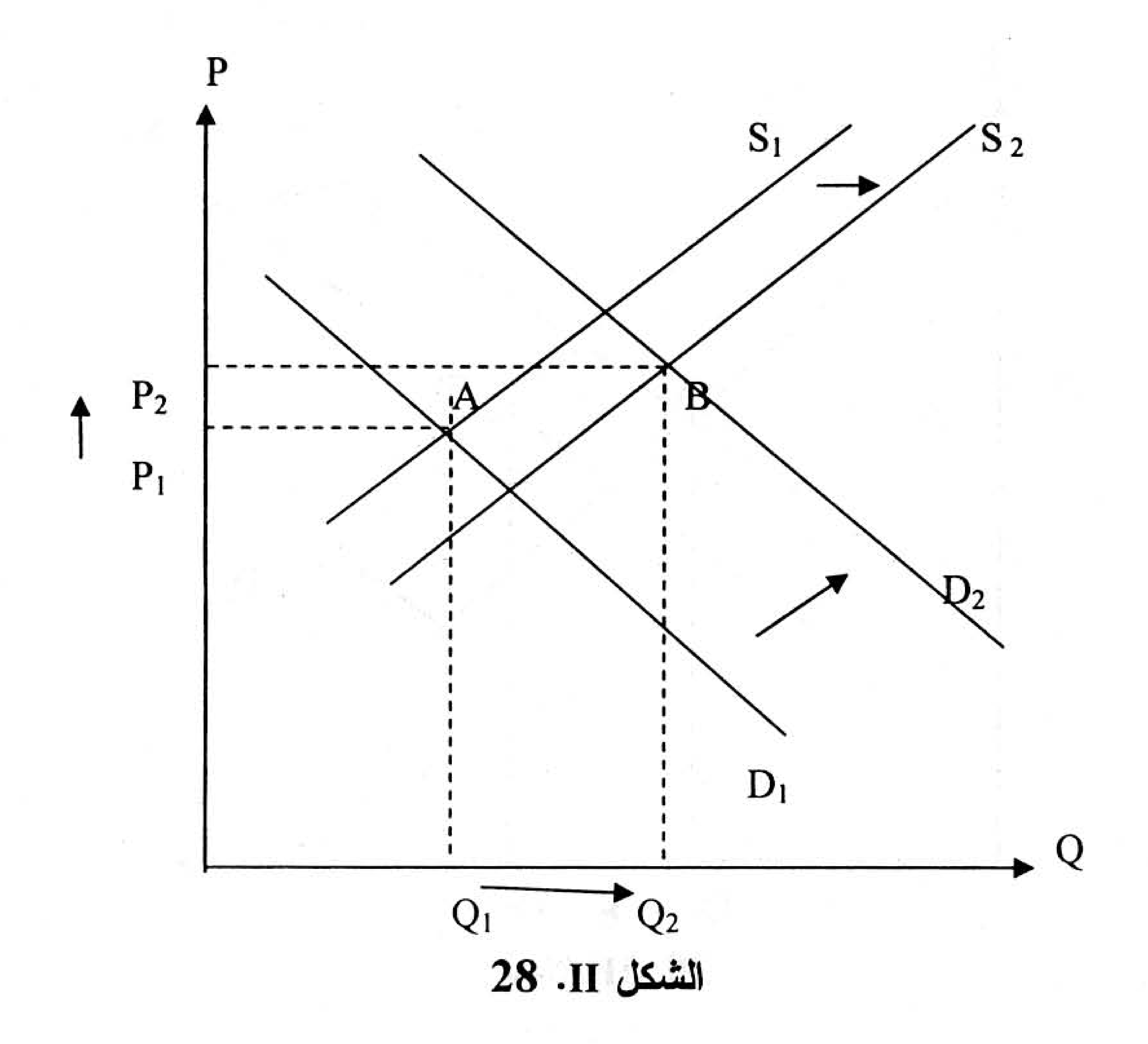
نقطة التوازن الجديدة هي B عندها يكون سعر التوازن الجديد أقل من سعر التوازن الأصلي وكمية التوازن الجديدة أكبر من كمية التوازن الأصلية ( أنظر الشكل رقم II، 27 ).




**الشكل II. 27**

## رابعا : زيادة الطلب أكبر من زيادة العرض :

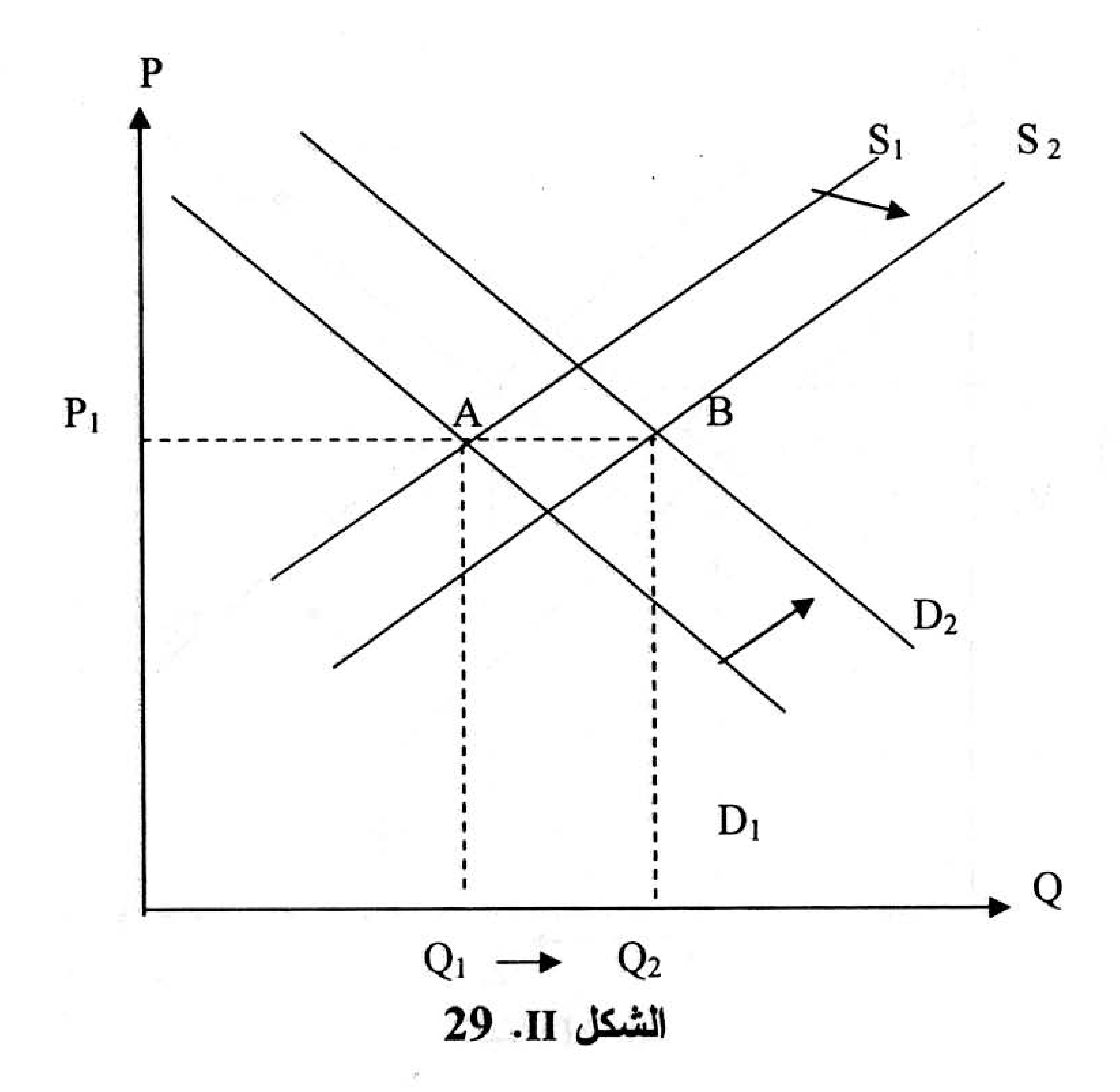
نقطة التوازن الجديدة هي B حيث يكون عندها سعر التوازن الجديد أكبر من سعر التوازن الأصلي وكمية التوازن الجديدة أكبر من كمية التوازن الأصلية ( أنظر الشكل رقم II. 28 ).




**الشكل II. 28**

## <u>خامسا : زيادة الطلب مساوية للزيادة في العرض :</u>

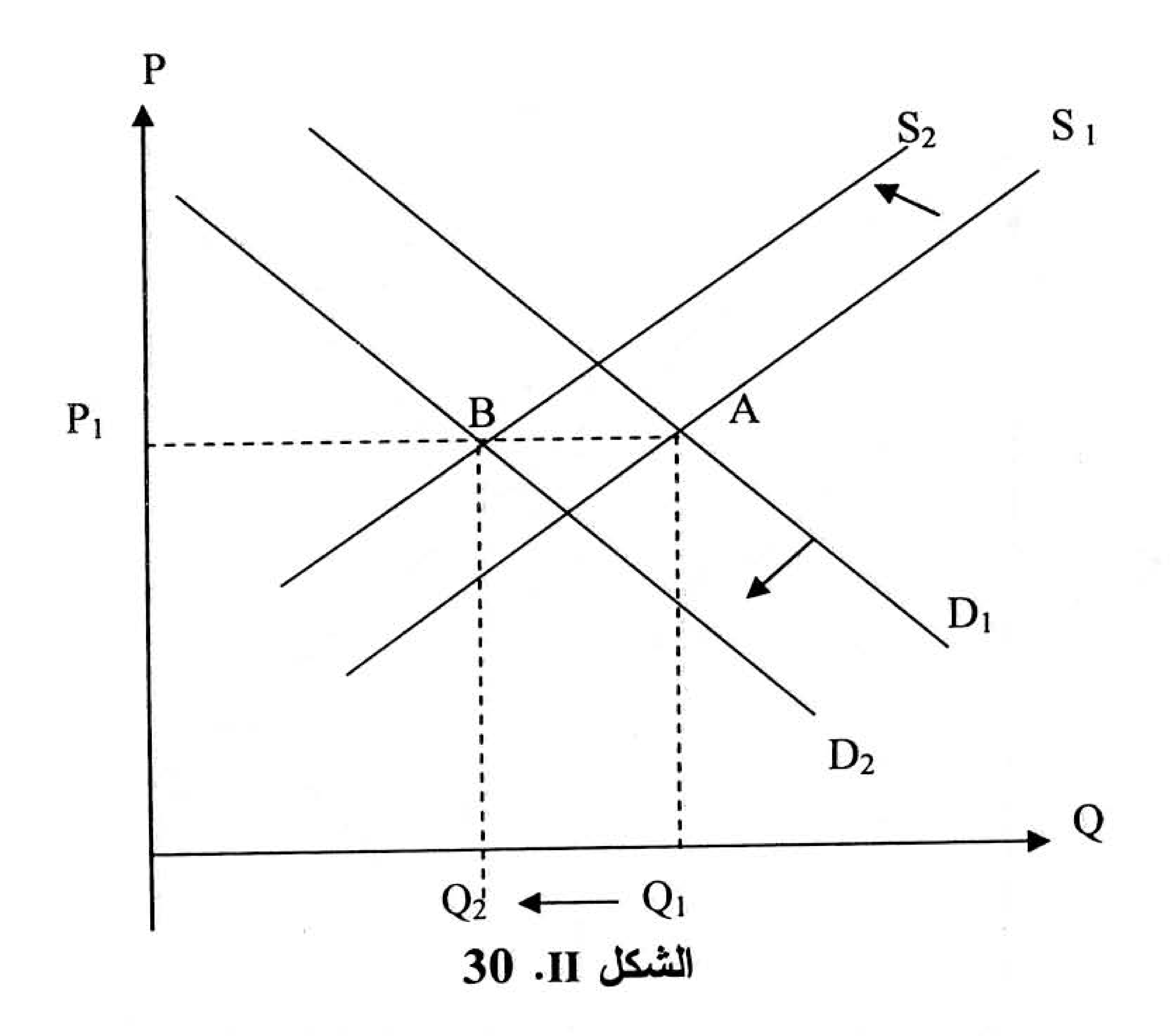
عندما تساوي الزيادة في الطلب مع الزيادة في العرض فإن سعر التوازن لا يتأثر، أما كمية التوازن الجديدة تكون أكبر من كمية التوازن الأصلية. ( أنظر الشكل رقم II. 29 )




الشكل II. 29

**سادسا : نقصان الطلب مساوي للنقصان في العرض :**

عند تساوي النقصان في الطلب مع النقصان في العرض فإن سعر التوازن لا يتأثر، أما كمية التوازن الجديدة تكون أقل من كمية التوازن الأصلية ( أنظر الشكل رقم II. 30 ).



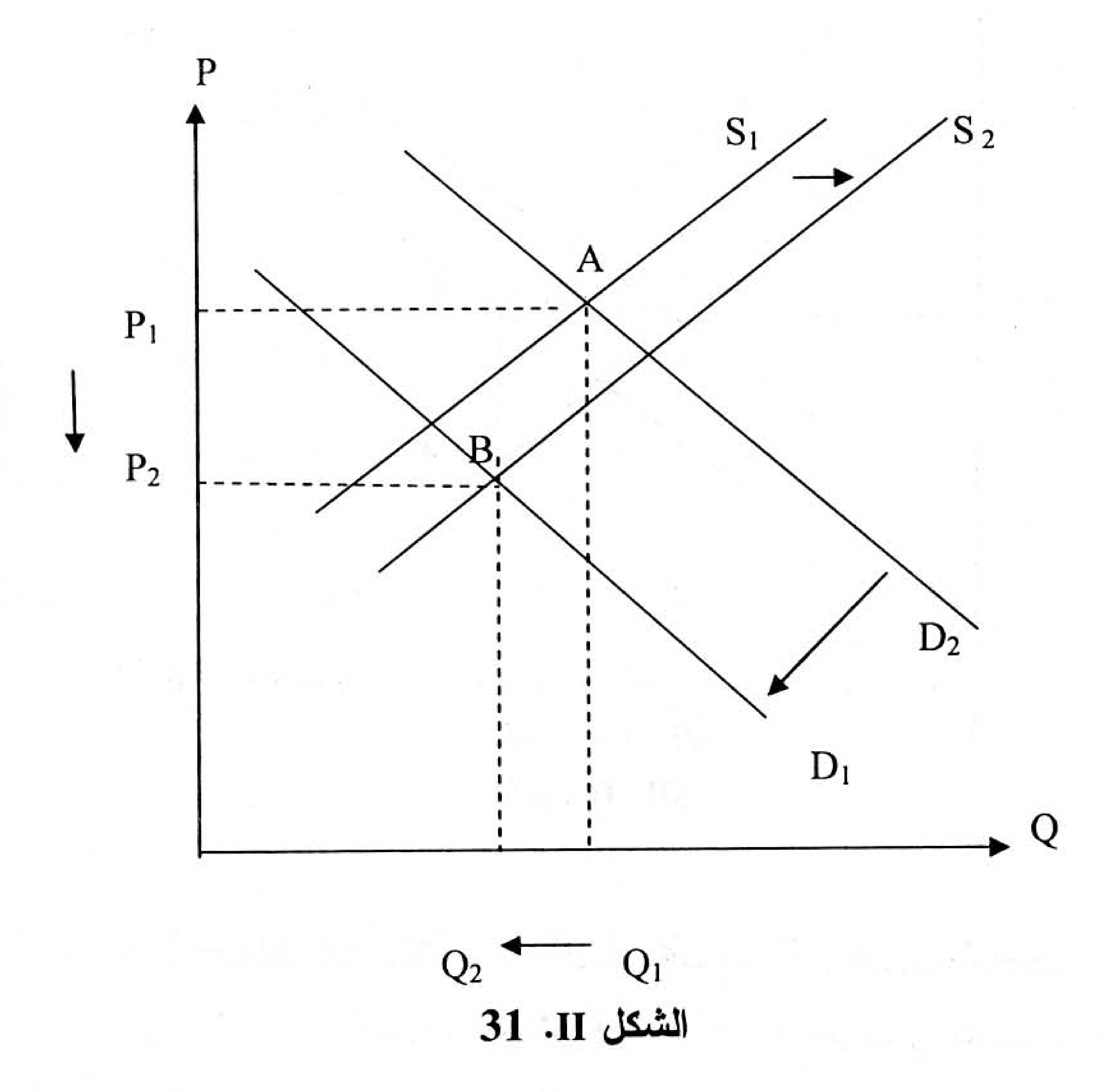

**الشكل II. 30**

## 3. 2 – تغير حالة الطلب وحالة العرض في اتجاهين متعارضين:

في حالة تغير الطلب والعرض في اتجاهين متعارضين فإنهما يؤثران في سعر التوازن في نفس الإتجاه لكنهما يؤثران في كمية التوازن في اتجاهين متعارضين ويتوقف اتجاه التغير في الكمية على القوة النسبية لكل من التغير الذي حدث في الطلب والتغير الذي حدث في العرض وسنتعرض لأربع حالات فيما يلي:

**أولا : نقصان الطلب أكبر من زيادة العرض :**

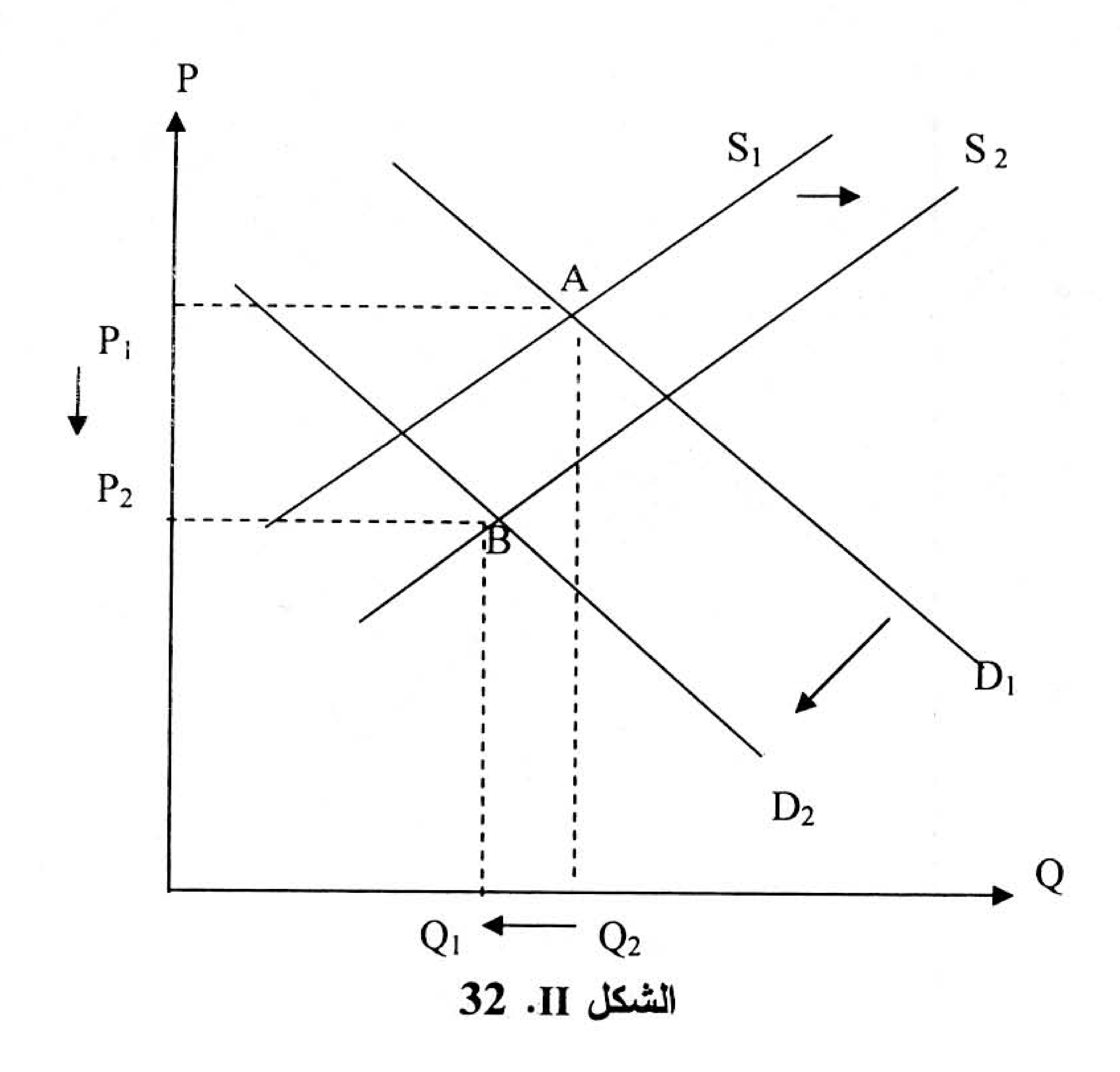
نقطة التوازن الجديدة هي B، وسعر التوازن الجديد $P_2$ أقل من سعر التوازن الأصلي، $P_1$ وكذلك كمية التوازن الجديدة $Q_2$ تكون أقل من كمية التوازن الأصلية $Q_1$ ( أنظر الشكل رقم II. 31 ).




**الشكل II. 31**

**ثانيا : زيادة العرض أكبر من نقصان الطلب :**

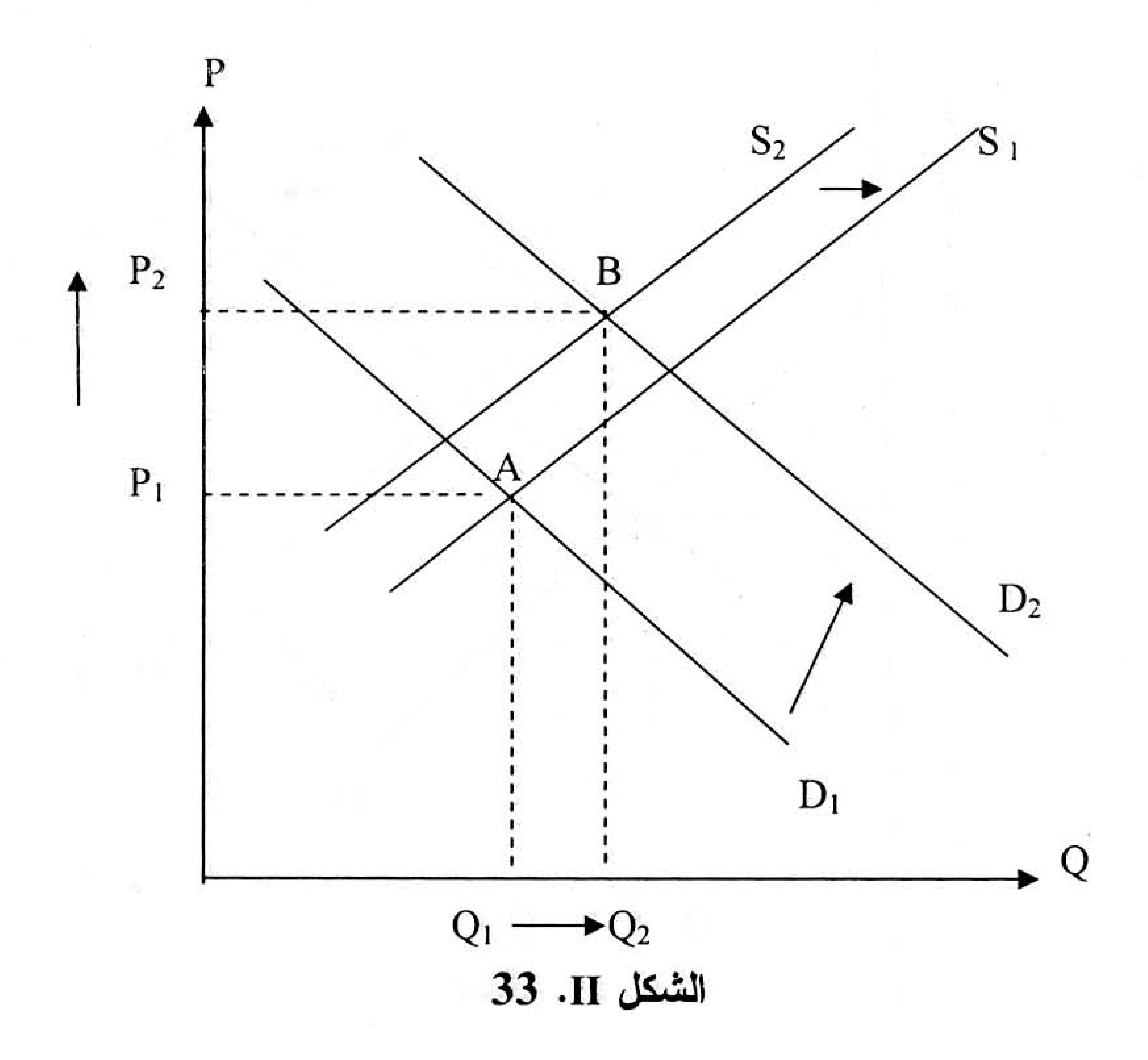
نقطة التوازن الجديدة هي B والسعر التوازني الجديد أقل من السعر التوازني الأصلي. أما كمية التوازن الجديدة فهي أكبر من كمية التوازن الأصلية ( أنظر الشكل رقم II. 32 ).




**الشكل II. 32**

**ثالثا : زيادة الطلب أكبر من نقصان العرض :**

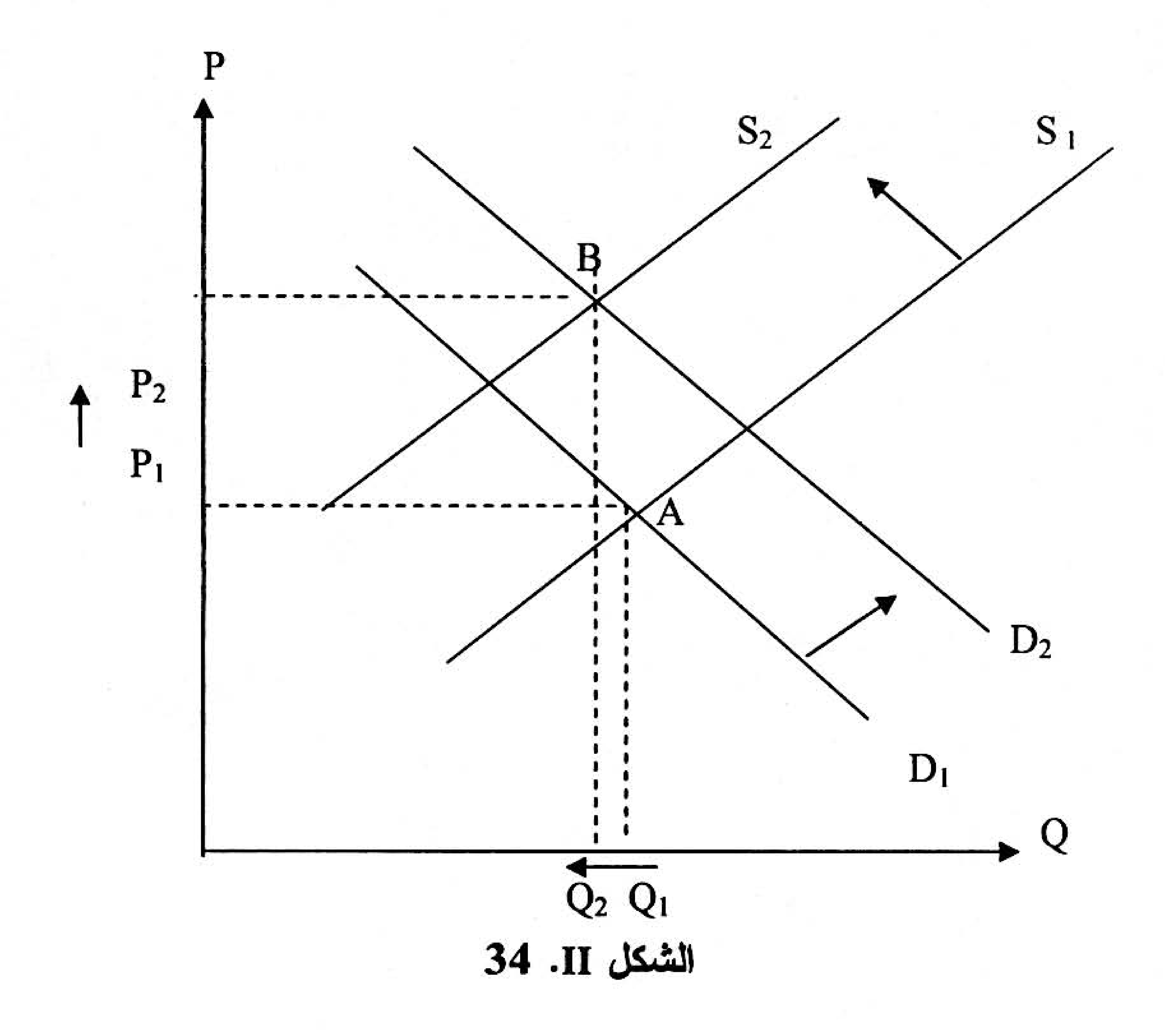
نقطة التوازن الجديدة هي B وسعر التوازن الجديد أكبر من سعر التوازن الأصلي، وكذلك كمية التوازن الجديدة أكبر من كمية التوازن الأصلية ( أنظر الشكل رقم II. 33 ).




**الشكل II. 33**

**<u>رابعا : زيادة الطلب أقل من نقصان العرض</u> :**

نقطة التوازن الجديدة هي B حيث عندها يكون سعر التوازن الجديد أكبر من سعر التوازن الأصلي وكمية التوازن الجديدة أقل من كمية التوازن الأصلية ( أنظر الشكل رقم II، 34 ).




الشكل II. 34

# الفصل الرابع

# تطبيقات على التوازن

## I – ضرائب الإنتاج وأثرها على توازن السوق التنافسية :

### 1 – الضرائب :

عندما تفرض الحكومة ضريبة على السلع المنتجة والخدمات أو ترفع من مستواها فإن تكاليف الإنتاج ترتفع مما يؤدي إلى تغيير حالة العرض بسبب تغير ظروف العرض وعليها يتغير منحنى العرض فينزاح إلى اليسار معلنا عن نقصان العرض عند أي مستوى من السعر.

أن المنتج هو الذي يدفع الضريبة إلى الحكومة، إلا أنه توزع الضريبة عادة بين المنتج ( أو البائع ) والمستهلك بنسب مختلفة، وتتوقف نسبة التوزيع على مرونة كل من منحنى العرض ومنحنى الطلب.

**2 – أنواع الضرائب** : يوجد نوعان من الضرائب : ضرائب الإنتاج النوعية وضرائب الإنتاج القيمية.

**2. 1 – ضريبة الإنتاج النوعية** : هي عبارة عن فرض مبلغ معين على كل وحدة من وحدات الإنتاج مثلا واحد دينار على كل وحدة منتجة.

**أولا : أثر الضريبة النوعية :**

لدينا نموذج سوق سلعة ما هو :

حيث:

دالة الطلب. $Q_d = a - bP \quad b\rangle 0$

دالة العرض. $Q_S = c - dP \quad d\rangle 0$

معادلة توازن النموذج. $Q_d = Q_S$

و $a\rangle c$

عند فرض ضريبة نوعية مقدارها T تبقى دالة الطلب على حالها في حين تصبح دالة العرض هي:

$$Q_S = c + d(P - t)$$

إذن النموذج بعد فرض ضريبة نوعية هو:

$$Q_d = a - bp$$
$$Q_S = c + d\,(P - t)$$
$$Q_d = Q_S$$

حيث تمثل a ، b ، C ، d معلمات النموذج، وحيث $a \rangle c$ , $b \rangle 0$ , $d \rangle 0$. أما t فهو متغير خارجي يتحدد خارج النموذج.

<u>**إيجاد سعر التوازن بعد فرض ضريبة نوعية :**</u>

نستطيع إيجاد سعر التوازن من المعادلة:

$$Q_d = Q_S$$
$$a - bp = c + dp - dt$$
$$P^* = \frac{a-c}{d+b} + \frac{d}{d+b}.t$$

نلاحظ أن الفرق بين سعري التوازن قبل وبعد فرض الضريبة هو الحد $\frac{d}{d+b}.t$ حيث يساوي هذا الأخير الصفر عندما لا تفرض ضريبة أي $t = 0$ .

ولمعرفة أثر الضريبة النوعية على سعر التوازن نحسب المشتق $\frac{dp^*}{dt}$

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{d}{d+b} \rangle 0$$

وبما أن $d + b \rangle 0$ فإن

$$0 \langle \frac{d}{d+b} \langle 1$$

إذن نلاحظ أن للضريبة النوعية أثر في سعر التوازن حيث تؤدي إلى رفع السعر *P ، ولكن بمقدار يقل عن معدل الضريبة.

**إيجاد كمية التوازن بعد فرض ضريبة نوعية :**

لإيجاد كمية التوازن نعوض عن سعر التوازن في دالة الطلب.

$$Q^* = Q_d = a - bp^* = a - b(\frac{a-c}{d+b} + \frac{d}{d+b}.t)$$

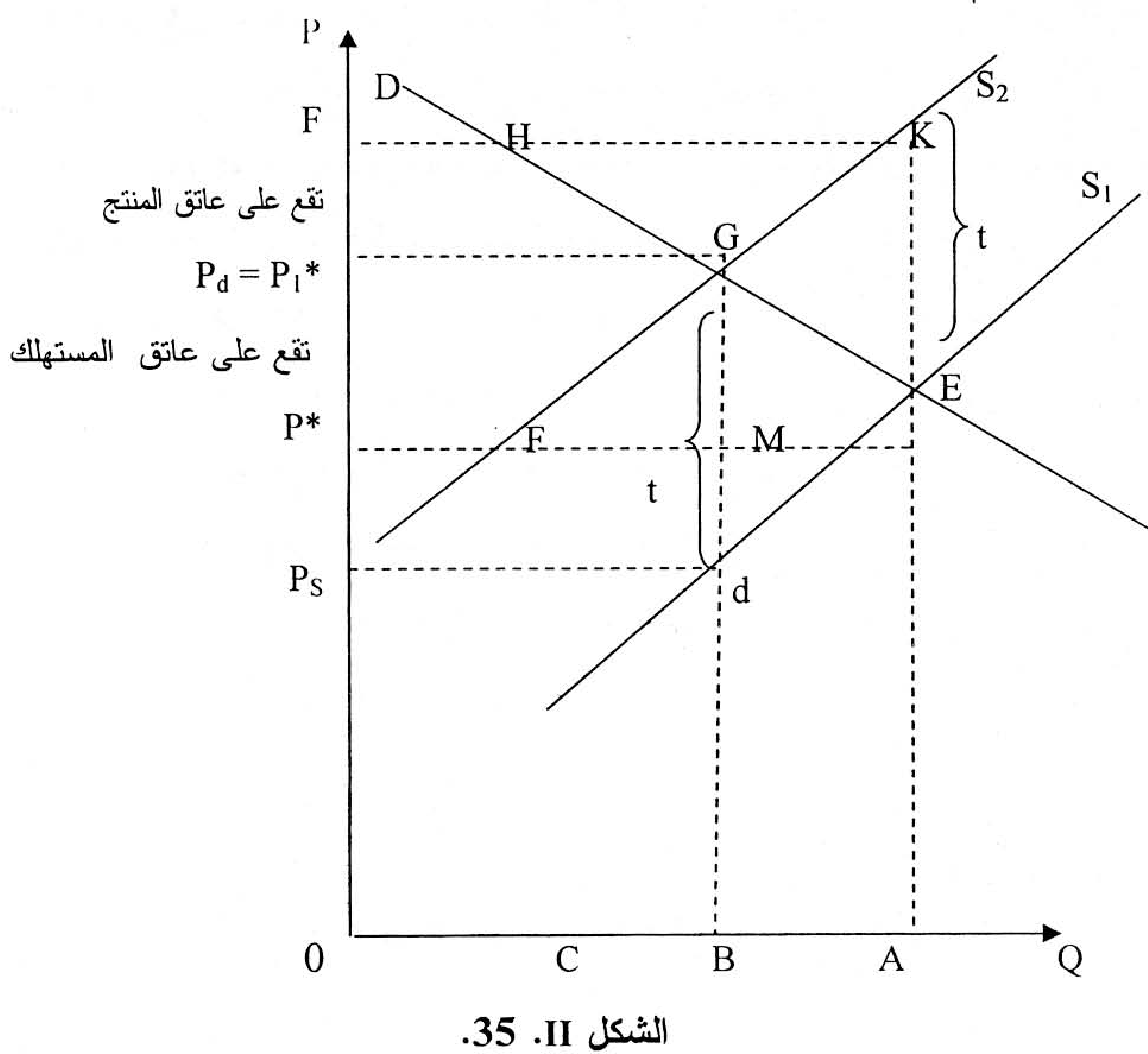
إذن كمية التوازن تساوي:

$$Q^* = \frac{ad+bc}{d+b} - \frac{bd}{d+b}t$$

نلاحظ الفرق بين كميتي التوازن قبل وبعد فرض الضريبة هو الحد $\frac{bd}{d+b}.t$ حيث يساوي هذا الأخير الصفر عندما لا تفرض ضريبة.

نلاحظ كذلك إذا كانت $t \neq 0$ فإن الكمية المطلوبة التوازنية تـنقص بمقدار $\frac{bd}{d+b}.t$.

**ثانيا : توزيع أعباء الضريبة** : نوضح توزيع الضـــريبة مـــن خـــلال الشكل رقم II. 35 .




**الشكل II. 35.**

من خلال الشكل نلاحظ أن نقطة التوازن الأصلية هي E وبعد فــرض ضريبة نوعية على كل وحدة منتجة مقدارها $t = P_d - P_s$ وهو الفرق بـــين سعر البائع والشاري إنزاح منحنى العرض $S_1$، ليصبح $S_2$ موازيا للمنحنى $S_1$ فإذا نظرنا من وجهة نظر المستهلك فمن مصلحته عدم تغيير السعر أي يبقى سعر التوازن مساويا إلى $AE = p*$ ولكن عند هذا الســـعر تكـــون الكميـــة

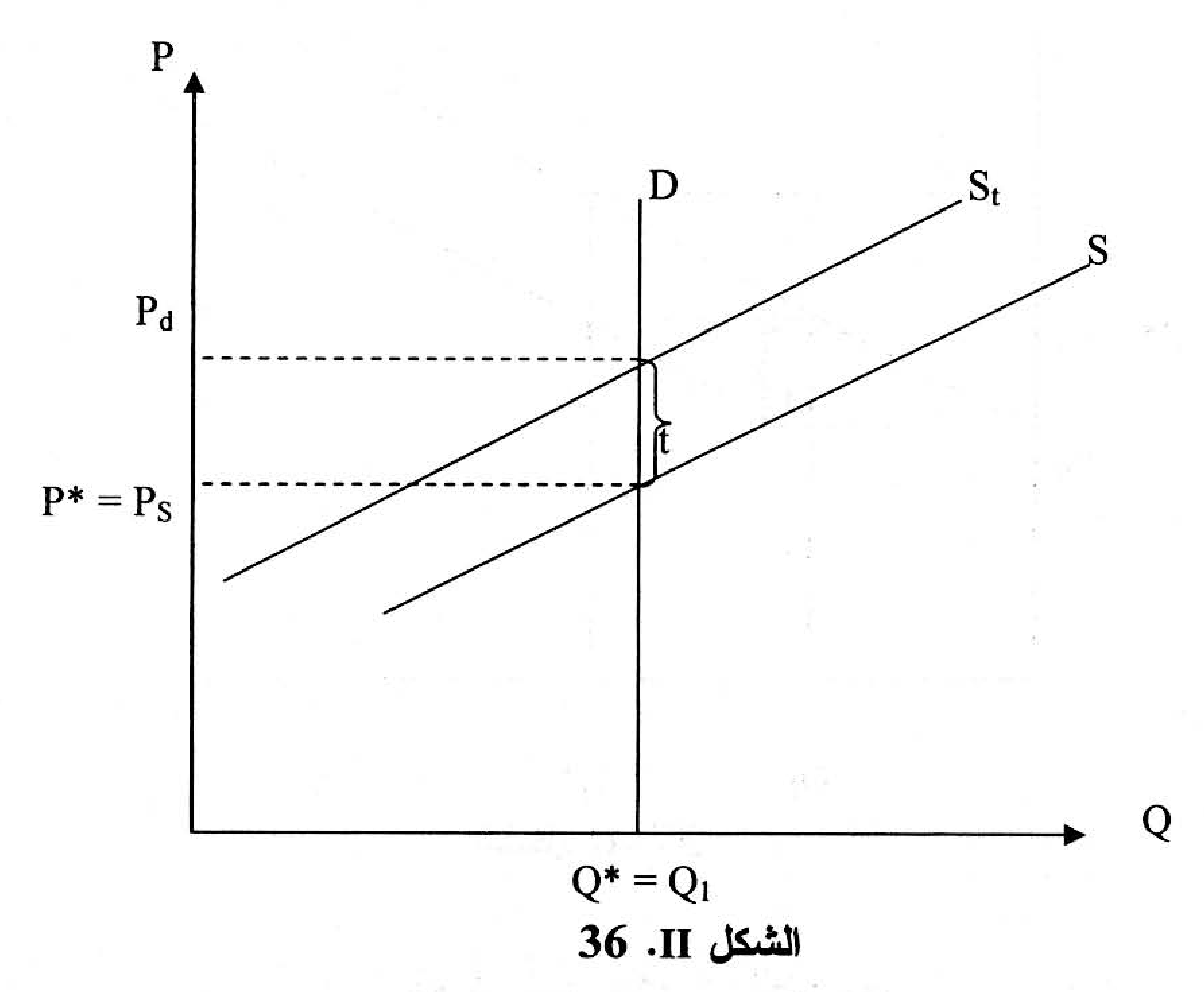
المطلوبة هي OA أما الكمية المعروضة فهي OC أي يوجد عجز في العرض ( فائض في الطلب ) حيث يؤدي هذا الفائض في الطلب إلى رفع السعر إلى $BC = P_D = P_1^*$ أما إذا نظرنا من وجهة نظر المنتج أو البائع فهذا الأخير يحاول رفع السعر بمقدار الضريبة ويحملها كلية للمستهلك أي يريد بيعها بالسعر AK وعند هذا السعر نجد الكمية المطلوبة هي FH في حين الكمية المعروضة هي FK أو OA، أي يوجد فائض بالعرض؛ حيث يدفع هذا الفائض بالسعر إلى الإنخفاض حتى السعر $P_1^*$. إذن نلاحظ أننا في تحليلنا للمشكل من وجهة نظر المنتج والمستهلك حصلنا على نقطة توازن جديدة هي G عندها سعر توازن جديد $P_1^*$ وكمية توازن جديدة OB. إذن يتحمل المستهلك جزء من الضريبة يساوي ( $P_1^* - P^*$ ) بينما يتحمل المنتج الجزء الآخر ( $P^* - P_s$ ) وبالتالي

$$\frac{\text{عبء الضريبة على المستهلك}}{\text{عبء الضريبة على المنتج}} = \frac{P_1^* - P^*}{P^* - P_S} = \frac{\text{مرونة العرض}}{\text{مرونة الطلب}}$$

فإذا كانت مرونة العرض ÷ مرونة الطلب كبيرة جدا فإن المستهلك هو الذي سيدفع الجزء الأكبر من الضريبة أما إذا كانت صغيرة جدا ( أقل من الواحد ) فإن المنتج هو الذي يدفع الجزء الأكبر، أما إذا ساوت الواحد فإنهما يتحملان معا نصيبا متساويا من الضريبة.

**بعض الأمثلة :**

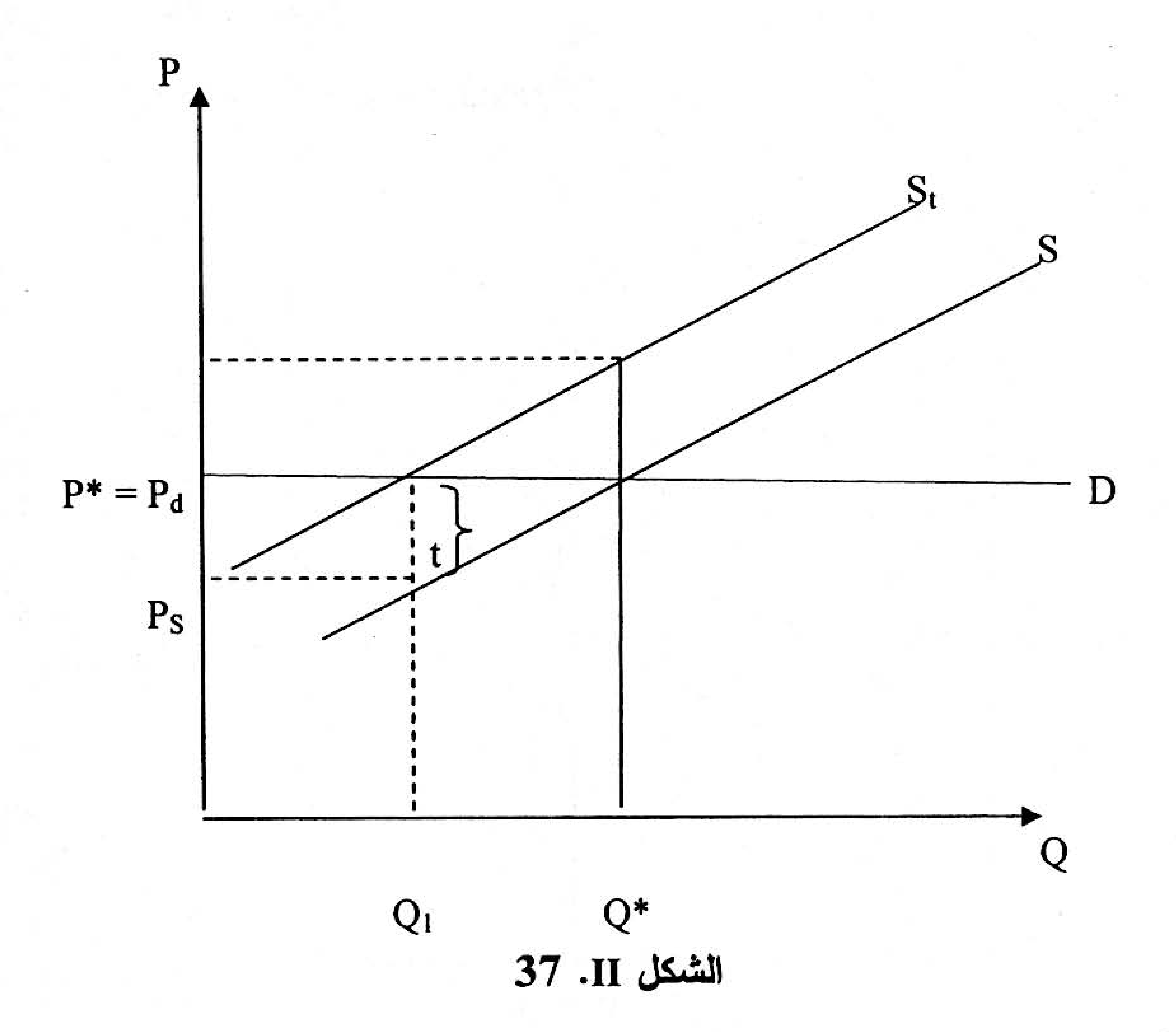
**منحنى الطلب عديم المرونة :**




**الشكل II. 36**

في هذه الحالة يدفع المستهلك كل الضريبة حيث: $t = P_d - P_s$

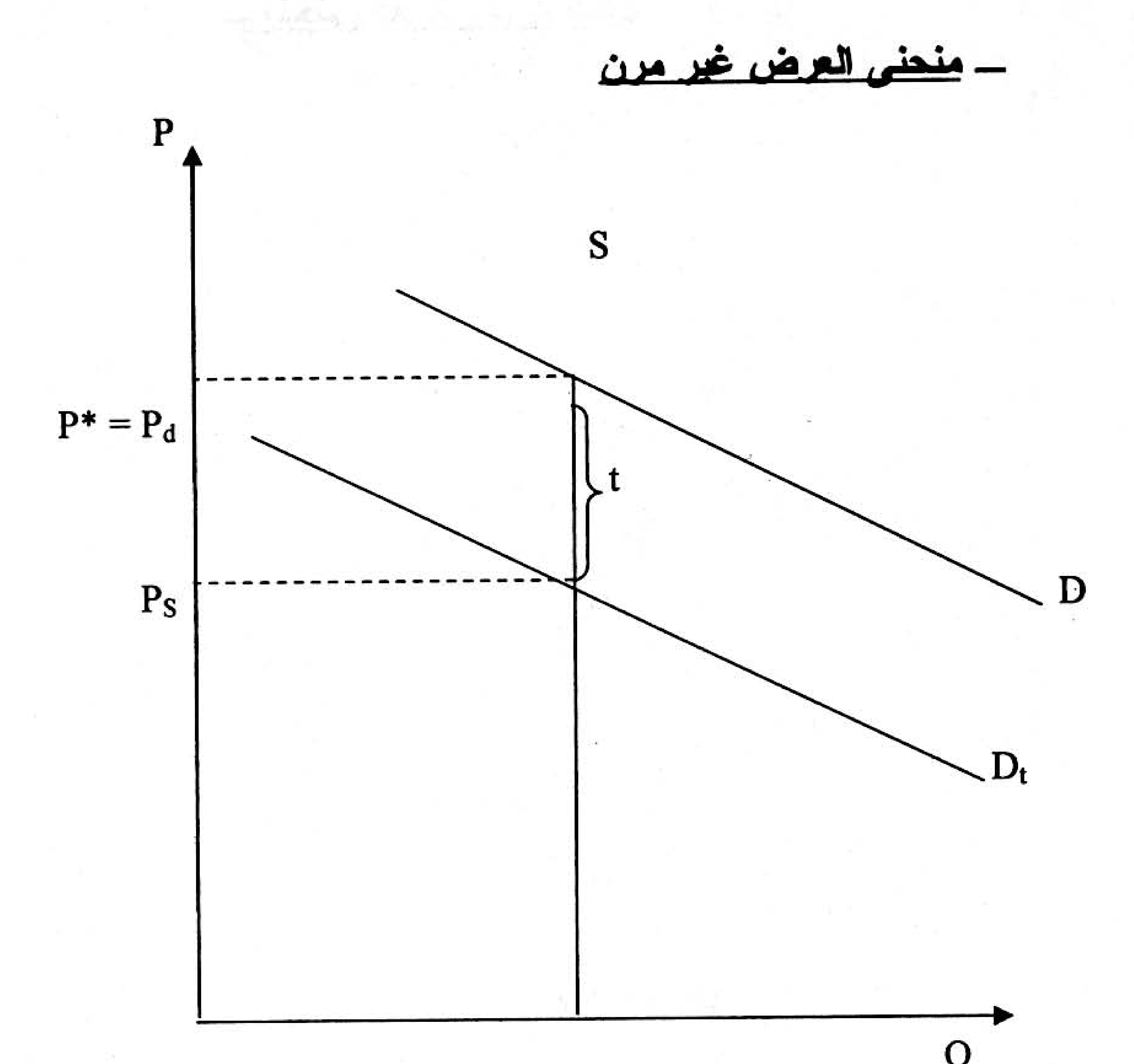
- **منحنى الطلب مرن تماما**




**الشكل II. 37**

في هذه الحالة البائع هو الذي يدفع كل الضريبة.

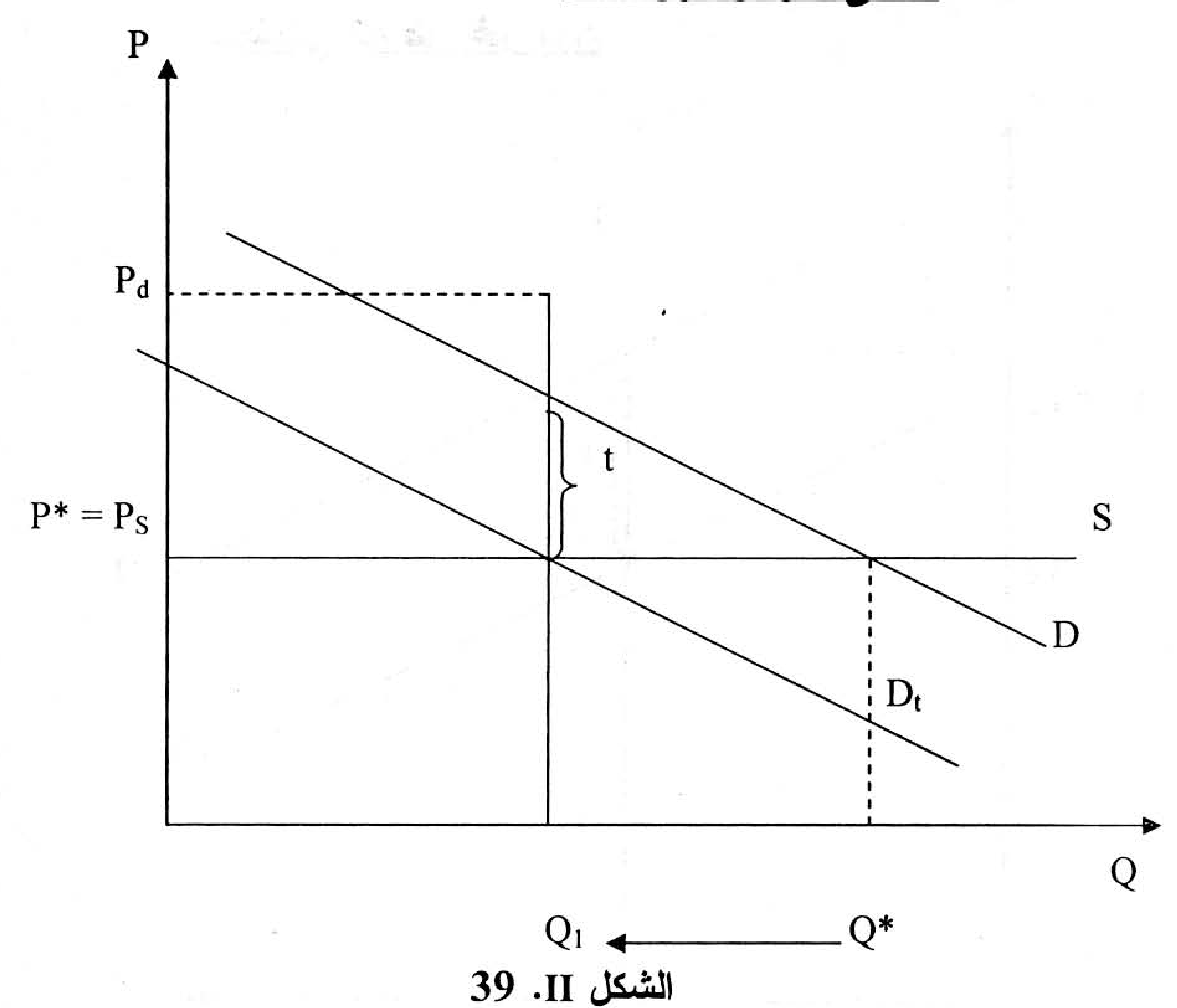
**– منحنى العرض غير مرن**




**الشكل II. 38**

في هذه الحالة يدفع البائع كل الضريبة.

**ـ منحنى العرض مرن تماما**




**الشكل II. 39**

في هذه الحالة يدفع المستهلك كل الضريبة.

**اعتدال مرونة الطلب والعرض :**

يكون الإعتدال في الحالات الواقعية وهي طلب مرن، طلب متكافئ المرونة، طلب قليل المرونة. في الحالات الثلاثة الواقعية يتوزع عبء الضريبة حسب النسبة بين مرونة العرض ومرونة الطلب فمثلا إذا كان :

$$\frac{\text{مرونة العرض}}{\text{مرونة الطلب}} = 1$$

فإن عبء الضريبة يتوزع بالمناصفة تقريبا بين المنتج والمستهلك

## ثالثا : حصيلة الضريبة :

تتوقف حصيلة الضريبة على معدل الضريبة t وعلى الكمية المباعة من السلعة وتعرف حصيلة الضريبة t على أنها T = t . Q .

لدينا السعر التوازني بعد فرض ضريبة نوعية على الوحدات المنتجة هو:

$$P^{*}=\frac{a-c}{d+b}+\frac{d}{d+b}t$$

وبالتالي الكمية التوازنية هي:

$$Q^{*}=\frac{ad+bc}{d+b}=\frac{bd}{d+b}t$$

ومنه نستنتج حصيلة الضريبة:

$$T=tQ^{*}=t(\frac{ad+bc}{d+b}-\frac{bd}{d+b}t)$$

$$T=\frac{ad+bc}{d+b}t-\frac{bd}{d+b}t^{2}$$

وهي دالة تربيعية.

## رابعا: أثر الضريبة في حصيلة الضريبة

لتحليل أثر t في حصيلة الضريبة T تشتق هذه الأخيرة بالنسبة إلى t.

$$\frac{dT}{dt}=\frac{ad+bc}{d+b}-2\frac{bd}{d+b}t$$

تكون $\frac{dT}{dt}$ موجبة ( تؤدي زيادة T إلى زيادة حصيلة الضريبة ) إذا كانت $ad+bc \rangle\ 2bdt$.

نطرح هنا سؤال هل استمرارية الزيادة في الضريبة تؤدي بالضرورة إلى زيادة حصيلتها ؟

بما أن a ، b ، c ، d معلمات معطاة فإنه لــيس مــن الضـــروري أن تؤدي استمرارية الزيادة في الضريبة إلى زيادة حصيلتها، بل عنــدما تصــل إلى حد معين تكون عنده الحصيلة أعظمية، وبعد هذا الحد تتناقص الحصيلة بسبب انكماش المبيعات الناتج عن زيادة الضريبة ( أي انكماش المبيعات إلى درجة لا يعوضها ارتفاع معدل الضريبة ).

**خامسا: معدل الضريبة الأمثل :**

معدل الضريبة الأمثل هو المعدل الذي يجعل من حصيلتها أعظمية، وللحصول على هذا المعدل نساوي $\frac{dT}{dt}$ بالصفر.

$$\frac{dT}{dt}=\frac{ad+bc}{d+b}-2\frac{bd}{d+b}t=0$$

ومنه

$$t^*=\frac{ad+bc}{2bd}$$

للتأكد من أنها نهاية عظمى نشتق المشتق الثاني:

$$\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{2bd}{d+b}\langle 0$$

إذن عند هذا المعدل من الضريبة النوعية تكــون حصــيلة الضـــريبة عظمى وبالتالي فهذا المعدل هو المعدل الأمثل للضريبة.

**مثال** : إذا علمت أن الطلب والعرض في سوق ما كما يلي:

$$Q_D=15-2P$$

$$Q_S=3+P$$

**المطلوب :**

1 ــ حساب السعر التوازني والكمية التوازنية.

2 ــ إذا فرضت ضريبة نوعية بمعدل 1 دينار للوحدة المباعة، أوجــد التوازن الجديد.

3 ــ أحسب معدل الضريبة الأمثل والسعر والكمية المقابلين وحصيلة الضريبة.

4 ــ أحسب $P_S, P_D$.

**الحل :**

1 ــ يتحقق التوازن عندما $Q_D = Q_S$.

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow 15 - 2P = 3 + P$$

من هذه المعادلة نحصل على سعر التوازن P* = 4.

و $Q^* = Q_d = Q_S = 7$

2 ــ إذا فرضت ضريبة بمعدل 1 دينـــار للوحـــدة المباعـــة يصـــبح النموذج:

$$Q_D = 15 - 2P$$

$$Q_S = 3 + (p - t) = 2 + P$$

حيث t = 1

$$Q_D = Q_S$$

لدينا:

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow 15 - 2P = 2 + P$$

$$P^*_1 = \frac{13}{3}$$

$$Q^*_1 = 15 - 2P = 15 - 2\frac{13}{3} = \frac{19}{3}$$

نلاحظ أنه بسبب فرض ضريبة نوعية إرتفع سعر التوازن وانكمشـــت الكميات المطلوبة التوازنية.

3 ــ حصيلة الضريبة. $T = tQ^*$

عند فرض ضريبة بمعدل t يكون السعر التوازني.

$$Q_d = Q_S \Leftrightarrow 15 - 2P + 3 + (P - t)$$

$$P*_1 = 4 + \frac{1}{3}t$$

حيث يمثل $\frac{1}{3}t$ الفرق بين سعري التوازن بعد وقبل فرض الضريبة أما الكمية التوازنية عند فرض الضريبة هي:

$$Q*_1 = 7 - \frac{2}{3}t$$

حيث يمثل $\frac{2}{3}t$ الفرق بين كميتي التوازن بعد وقبل فرض الضريبة وبالتالي حصيلة الضريبة تساوي:

$$T = tQ*_1$$

$$T = t(7 - \frac{2}{3}t) = 7t - \frac{2}{3}t^2$$

وهي دالة تربيعية في t

وتبلغ T نهايتها العظمى عندما:

$$\frac{dT}{dt} = 7 - \frac{4}{3}t = 0$$

$$t* = 7.\frac{3}{4} = \frac{21}{4}$$

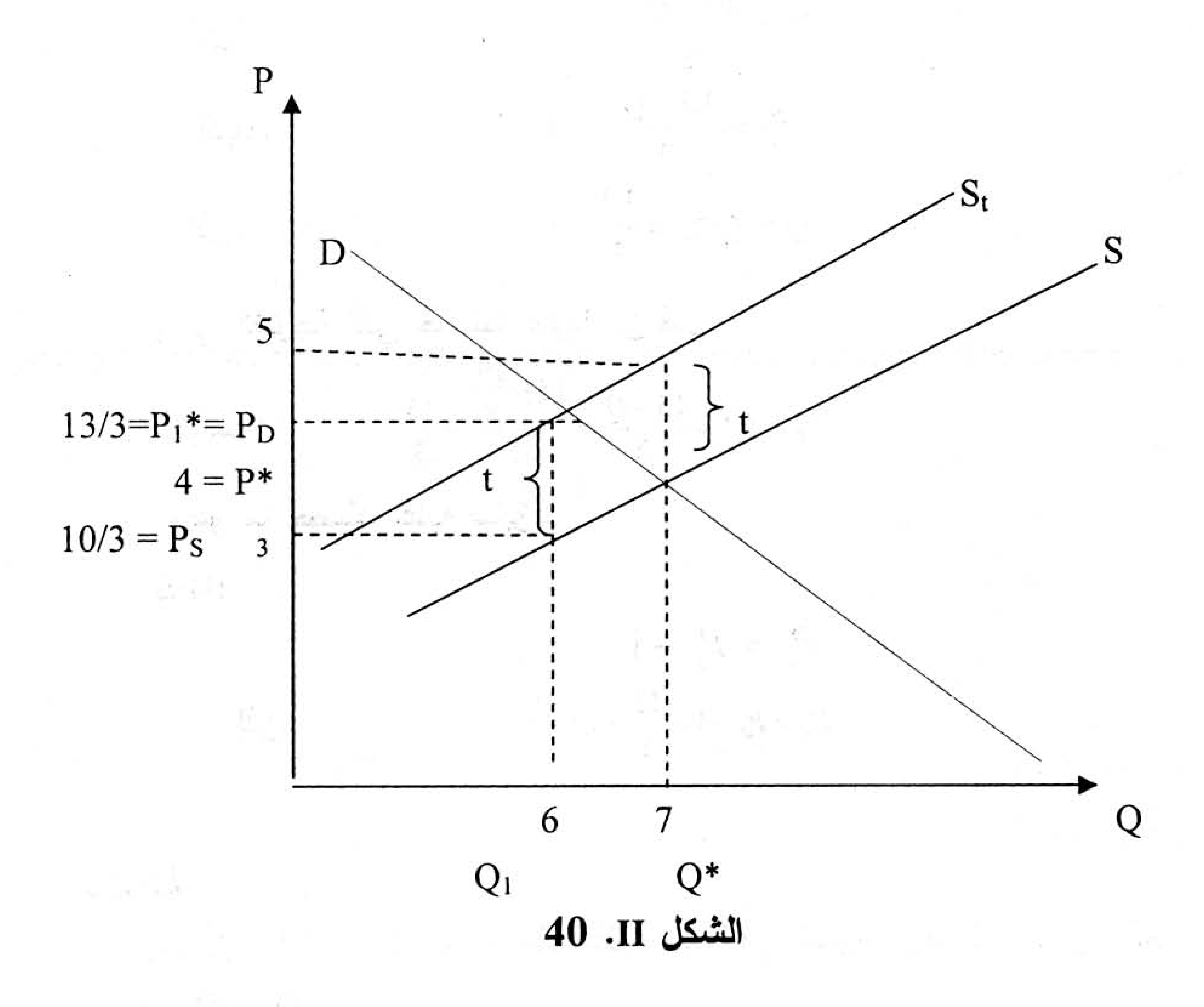
للتأكد أن T أعظمية نحسب المشتق الثاني:

$$\frac{dT^2}{dt^2} = -\frac{4}{3}\langle 0$$

إذن عندما $t* = \frac{21}{4}$ فإن حصيلة الضريبة عظمى وبالتالي $t* = \frac{21}{4}$ هو المعدل الأمثل للضريبة. وإذا زادت الضريبة عن هذا الحد فإن حصيلة الضريبة تتناقص لأن المبيعات تتكمش إلى درجة لا يعوضها ارتفاع معدل الضريبة حيث يكون السعر المقابل له $P*_1 = \frac{23}{4}$ ,الكمية المقابلة $Q* = \frac{7}{2}$.

وحصيلة الضريبة $T = \frac{7}{2}\ \frac{21}{4} = \frac{147}{8}$.

4 ـ نلاحظ من الشكل أسفله أن السعر التـوازني هـو $P^*$ والكميـة التوازنية هي $Q^*$ وبعد فرض الضريبة النوعية على كل وحدة مباعة ظهـر سعران : سعر الشاري $P_d$، وهو السعر الذي يقبل الشاري دفعـه للحصـول على السلعة حيث يتحدد سعر الشاري من منحنى الطلب، وسعر البائع وهـو السعر الذي يستلمه هذا الأخير بعد دفع الضريبة ويتحدد سـعر البـائع مـن منحنى العرض. أما الفرق بين السعرين ( $P_d - P_s$ ) فهـو يمثـل الضـريبة $t = P_d - P_s$.




**الشكل II. 40**

فإذا حولنا النموذج المعطى بالشكل السابق إلى الشكل التالي:

$$P_d = \frac{15-Q}{2}$$

$$P_S = Q-3$$

$$P_d = P_S + t = P_S + 1$$

يمكننا حساب $P_S, P_D$

لدينا:

$$P_d = \frac{15-Q}{2} = P_S + 1$$

إذن:

$$P_S = \frac{13-Q}{2}$$

لدينا:

$$P_S = \frac{13-Q}{2} = Q-3$$

إذن:

$$Q = Q*_1 = \frac{19}{3}$$

وهي النتيجة التي حصلنا عليها من قبل.

ومنه:

$$P_d = P_1* = \frac{15-Q}{2} = \frac{15-\frac{19}{8}}{2} = \frac{13}{3}$$

وهو ما حصلنا عليه سابق.

لدينا:

$$P_d = P_S + 1$$

إذن:

$$P_S = P_d - 1 = \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3}$$

**ملاحظة:**

بما أن $P_d = P_1*$ وقد حصلنا عليه سابقا في السؤال رقم 2. ونحن نعلم أن: $P_d = P_S + 1$ فإننا نستطيع إيجاد $P_S$ مباشرة.

**حيث** $P_S = P_S - 1 = \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3}$

كما أننا نلاحظ أن ما تحمله الشاري هو 1/3 معدل الضريبة في حـــين ما تحمله البائع هو 2/3 من معدل الضريبة.

لأن:

$$P_d - P^* = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$P^* - P_S = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

**سادسا : حالات الإستثناء في قانون الطلب والعرض :**

**أ ــ الإستثناء في قانون الطلب :**

لقد قلنا في ما سبق لقانون الطلب استثناء حيث تصـــبح العلاقـــة بـــين السعر والكمية المطلوبة علاقة طردية أي :

حيث:

$$Q_D = a + bp \qquad b \rangle 0$$

في هذه الحالة يصبح النموذج كالتالي:

حيث: $Q = a + bp \qquad b \rangle 0$

حيث : $Q_S = c + d(p - t) \qquad d \rangle 0$

$$Q_D = Q_S$$

وبعد حل النموذج نجد سعر التوازن:

$$P^* = \frac{a - c}{d - b} + \frac{d}{d - b} t$$

وكمية التوازن:

$$Q^* = \frac{ad - bc}{d - b} + \frac{bd}{d - b} t$$

إذا كانت $t = 0$ نجد:

$$P^* = \frac{a - d}{d - b}$$

$$Q^* = \frac{ad - bc}{d - b}$$

في الحالة الاستثنائية للطلب يواجهنا ثلاثة احتمالات:

**<u>الاحتمال الأول</u>:** إذا كانت d > b فإن:

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{d}{d-b} \rangle 0$$

وبما أن d > b فإن:

$$\frac{d}{d-b} \rangle 1 \text{ و } d \rangle (d-b)$$

ومعنى هذا أن:

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{d}{d-b} \rangle 1$$

أي أن فرض الضريبة يؤدي إلى رفع السعر وبمقدار أكبر من الضريبة نفسها.

كما أن للضريبة أثر في الكمية التوازنية حيث تزيد بعد فرض الضريبة بالرغم من ارتفاع السعر التوازني مما يدل على الحالات الإستثنائية لقانون الطلب.

**<u>الاحتمال الثاني</u>** : إذا كانت d < b

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{d}{d-b} \langle 0$$

كما أن $P^* = \frac{a-c}{d-b} \langle 0$ وهذا غير مقبول لهذا نضع a < c حتى نضمن $P^* = \frac{a-c}{d-b} \rangle 0$ وبالتالي نضمن كذلك:

$$P^* = \frac{a-c}{d-b} + \frac{d}{d-b} t \rangle 0$$

بعد فرض الضريبة، وكذلك حتى نحصل على كمية توازنية مقبولة ( موجبة ) سواء قبل فرض الضريبة أو بعدها يجب أن يكون a < c .

**الإحتمال الثالث** : إذا كانت d = b لا يمكن الحصول على سعر توازني محدد. فقبل فرض الضريبة ينطبق منحنى الطلب على منحنى العرض إذا كانت a = c وأي نقطة على هذا المنحنى تمثل نقطة توازن. أما إذا كانت a ≠ c سيكون منحنى الطلب يوازي منحنى العرض ولا يوجد نقطة توازن وفي كلتا الحالتين لا يمكننا الحصول على سعر توازني ولا كمية توازنية بعد فرض الضريبة.

**ب ـ الإستثناء في قانون العرض** : ولقد بيناه سابقا على أن العلاقة بين السعر والكمية تكون علاقة عكسية، ويصبح النموذج على الشكل التالي:

حيث:

$$Q_D = a + bp \qquad b > 0$$

$$Q_S = c - d(p - t) \qquad d > 0$$

$$Q_D = Q_S$$

وبعد حل النموذج نجد سعر التوازن:

$$P^* = \frac{c-a}{d-b} + \frac{d}{d-b}t$$ عندما $t \neq 0$

والكمية التوازنية:

$$Q^* = \frac{ad-bc}{d-b} - \frac{bd}{d-b}t$$

عندما $t \neq 0$

في الحالة الإستثنائية لقانون العرض يواجهنا ثلاثة إحتمالات.

**الإحتمال الأول:** $d > b$

لكي يكون: $P^* = \frac{c-a}{d-b} > 0$ يجب أن تكون: a < c

بعد فرض ضريبة نوعية بمعدل t يرتفع سعر التوازن

$$P^* = \frac{c-a}{d-b} + \frac{d}{d-b}t$$

لأن:

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{d}{d-b} \rangle 0$$

ـ لكي يكون: $Q^* = \frac{ad-bc}{d-b} \rangle 0$ يجب أن تكون: $ad-bc \rangle 0 \Rightarrow ad \rangle bc$

بعد فرض ضريبة نوعية t تنخفض الكمية التوازنية فتصبح:

$$Q^* = \frac{ad-bc}{d-b} - \frac{bd}{d-b}t$$

لأن:

$$\frac{dQ^*}{dt} = -\frac{bd}{d-b} \langle 0$$

نلاحظ ارتفاع السعر التوازني بسبب الضريبة المفروضة يؤدي إلــى إنخفاض الكمية التوازنية وهي حالة استثنائية لقانون العرض.

**<u>الإحتمال الثاني</u>** : $d < b$

لكي يكون: $P^* = \frac{c-a}{d-b} \rangle 0$ يجب أن تكون $a > c$

بعد فرض ضريبة t ينخفض سعر التوازن.

$$P^* = \frac{c-a}{d-b} + \frac{d}{d-b}t$$

لأن: $\frac{dp^*}{dt} = \frac{d}{d-b} \langle 0$

حيث: $d-b \langle 0, \ bd \rangle 0$

لكي تكون $Q^* = \frac{ad-bc}{d-b} \rangle 0$ يجب أن تكون:

$ad-bc \langle 0 \Rightarrow ad \langle bc$ و حيث: $d-b \langle 0$

بعد فرض ضريبة نوعية t تصبح:

$$Q^* = \frac{ad-bc}{d-b} - \frac{bd}{d-b}t$$

أي يرتفع العرض بدلا أن ينخفض لأن:

$$\frac{dQ^*}{dt} = -\frac{bd}{d-b} \rangle 0$$

وهذه حالة استثنائية للعرض حيث توجد علاقة عكسية بين السعر والكمية.

**ـ الاحتمال الثالث:** d = b

قبل فرض الضريبة: $P^* = \frac{c-a}{d-b}$

إذا كانت a = c ينطبق منحنى الطلب على منحنى العرض ولا يمكننا الحصول على سعر توازني محدد.

إذا كانت a ≠ c يوازي منحنى الطلب منحنى العرض.

وفي كلتا الحالتين لا يمكننا الحصول على سعر توازني ولا كمية توازنية.

**2. 2 ـ الضريبة القيمية:**

عبارة عن فرض نسبة معينة على سعر كل وحدة من وحدات الإنتاج فإذا كانت النسبة المئوية الضريبية إلى سعر الوحدة المنتجة هي r حيث :

$$P^r = p(1-r)$$

وتصبح دالة العرض بعد فرض الضريبة القيمية:

$$Q_S = c + dp^r = c + dp(1-r)$$

$$Q_S = c + dp - dpr$$

ويصبح نموذج السلعة في السوق:

$$Q_D = a - b_p$$
$$Q_S = c + dp - dpr$$
$$Q_D = Q_S$$

بعد حل النموذج نجد سعر التوازن بعد فرض ضريبة قيمية هو:

$$P^* = \frac{a-c}{d+b-dr}$$

وكمية التوازن هي: $Q^* = \dfrac{ad+bc-adr}{d+b-dr}$

إذا كانت r = o فإننا نحصل على سعر التوازن وكمية التـــوازن قبـــل فرض الضريبة.

**<u>أثر الضريبة في سعر التوازن</u> :**

لمعرفة أثر الضريبة القيمية في سعر التوازن نشتق هذا الأخير بالنسبة للضريبة.

$$\frac{dp^*}{dr} = \frac{d(a-c)}{(d+b-dr)^2} \rangle 0$$

عندما: $a \rangle c \rangle 0$

ومعنى ذلك يرتفع سعر التوازن مع معدل الضريبة القيمية عادة.

**ـ <u>أثر الضريبة القيمية في كمية التوازن.</u>**

لمعرفة أثر الضريبة القيمية في كمية التوازن نشـــتق كميـــة التـــوازن بالنسبة لمعدل الضريبة:

$$\frac{dQ}{dr} = \frac{dbc-adb}{(d+b-dr)^2} \langle 0$$

لأن: $a \rangle c \Rightarrow dba \rangle adc$

**أي: $dbc - dba \langle 0$ وبما أن المقام دائما موجب فإن:**

$$\frac{dbc - adb}{(d + b - dr)^2} \langle 0$$

ومعنى هذا أنه تنخفض الكمية التوازنية عند ارتفاع السعر التوازني بسبب فرض ضريبة قيمية على الوحدات المنتجة.

**مثال:** إذا علمت أن نموذج سوق سلعة ما ( نفس المثال السابق ) هو :

$$Q_d = 15 - 2P$$
$$Q_S = 3 + P$$
$$Q_d = Q_S$$

1 ) أحسب أثر فرض ضريبة قيمية بمعدل 20 % على سعر الوحدة المباعة على كل من السعر التوازني والكمية التوازنية.

2 ) تحديد معدل الضريبة القيمية الذي يعادل في أثره على التوازن معدل الضريبة النوعية الأمثل.

**الحل :**

1 ) إذا فرضت ضريبة قيمية بمعدل 20 % من سعر الوحدة المنتجة يصبح نموذج سوق السلعة كما يلي:

$$Q_d = 15 - 2P$$
$$Q_S = 3 + P(1 - 0,20)$$
$$Q_d = Q_S$$

لدينا $Q_d = Q_S \Leftrightarrow 15 - 2P = 3 + P(1 - 0.20)$

$$P^* = \frac{12}{2.8} = \frac{120}{28} = \frac{30}{7}$$

من دالة الطلب:

$$Q^* - Q_D = 15 - 2P$$

نحصل على كمية التوازن:

$$Q^* = 15 - 2P = 15 - 2(\frac{30}{7})$$

$$Q^* = \frac{45}{7}$$

نلاحظ أن السعر التوازني قبل فرض ضريبة قيمية كان P* = 4 أما بعد فرض ضريبة قيمية r = 0,20 أصبح P*= 30 / 7 ومعنى هذا أن السعر التوازني ارتفع مع معدل الضريبة القيمية.

كذلك بالنسبة للكمية التوازنية كانت Q* = 7 قبل فرض الضريبة ثم أصبحت بعد فرض الضريبة Q* = 45 / 7 أي انخفضت بارتفاع السعر نتيجة فرض الضريبة ومعنى هذا أن الكمية التوازنية تنخفض بارتفاع معدل الضريبة.

2 ) عند فرض ضريبة نوعية كان المعدل الأمثل للضريبة t* = 21 / 4 يقابله سعر توازني P* = 23 / 4 وكمية توازنية Q* = 7 / 2.

ولحساب معدل الضريبة القيمية الذي يعادل أثره على التوازن أثر معدل الضريبة النوعية الأمثل نعوض عن سعر التوازن وكمية التوازن في حالة المعدل الأمثل للضريبة النوعية في دالة العرض التالية :

$$Q^* = Q_S = 3 + P(1 - n)$$

$$Q^* = 3 + \frac{23}{4}(1 - n) = \frac{7}{2}$$

$$r = \frac{21}{23}$$

نقوم الآن بحساب حصيلة الضريبية القيمية عدد هذا المعدل:

$$t = r.P^*.Q^* = \frac{21}{23}.\frac{23}{4}.\frac{7}{2} = \frac{147}{8}$$

وهي نفس حصيلة الضريبة النوعية عند المعدل الأمثل.

يجب أن نذكر في هذا المقام أن الدولة إذا أرادت أن تنقص العرض فإنها تفرض الرسوم الجمركية على الواردات أو الضريبة على الإنتاج المحلي.

## II – الإعانات :

إذا أرادت الدولة تحقيق زيادة في العرض فإنها تساعد المنتجين بمنحهم إعانات أو قروضا بتسهيلات.

يمكن اعتبار إعانة الإنتاج بمثابة ضريبة سالبة تضاف إلى السعر بدلا أن تطرح منه.

$Pt = P + t$ حيث تمثل t الإعانة المقدمة إلى المنتجين على كل وحدة منتجة، وفي حالة تقديم إعانة إنتاج لإنتاج سلعة معينة يكون نموذج سوق هذه السلعة كالتالي:

حيث $b > 0p$ $\qquad Q_D = a - b$

وحيث $d > 0$ $\qquad Q_S = c + d(p + t)$

$Q_D = Q_S$

لدينا:

$$Q_D = Q_S \Leftrightarrow a - bp = c + d(p + t)$$

ومنه:

$$P^* = \frac{a-c}{d+b} - \frac{d}{d+b}t$$

حيث $a > c$ حتى نضمن الحصول على سعر توازني موجب.

**أثر الإعانة في سعر التوازن :**

لمعرفة أثر الإعانة في سعر التوازن نحسب:

$$\frac{dp^*}{dt} = -\frac{d}{d+b} \langle \ 0$$

ومعنى هذا ينخفض سعر التوازن بتقديم الدولة إعانة إنتاج للمنتجين.

**أثر الإعانة في كمية التوازن :**

لكي نحصل على كمية التوازن بعد تقديم الإعانة نعوض عـن سـعر التوازن في دالة الطلب.

$$Q^* = Q_D = a - b(\frac{a-c}{d+b} - \frac{d}{d+b} - t)$$

$$Q^* = \frac{ad+bc}{d+b} + \frac{db}{d+b} - t$$

لمعرفة أثر الإعانة في كمية التوازن نحسب

$$\frac{dQ^*}{dt} = -\frac{db}{d+b} \rangle 0$$

ومعنى هذا ترتفع كمية التوازن بعد تقديم الإعانة للمنتجين.

**ملاحظة** : يمكننا تحديد سعر المستهلك من منحنى الطلب وفي حالتنـا هذه يمثل سعر التوازن بعد تقديم الإعانة سعر المستهلك، بينما يمكننا تحديـد سعر البائع من منحنى العرض بعد تقديم الإعانة وهنا نذكر بأن :

$$P_S = P_D + t$$

أي

$$P_S - P_D = t$$

**مثال** : ليكن نموذج سوق سلعة معينة.

$$Q_d = 15 - 4P$$

$$Q_S = 6P - 1$$

$$Q_d = Q_S$$

1 ) أحسب سعر وكمية التوازن.

2 ) إذا فرضت الدولة ضريبة نوعية قدرها 2 دينار، أحسب سعر وكمية التوازن ثم أحسب سعر المستهلك وسعر المنتج.

3 ) نفرض أن الدولة قدمت إعانة للمنتجين بدل فرض الضريبة، أحسب سعر التوازن وكمية التوازن ثم أحسب سعر المستهلك وسعر المنتج.

<u>**الحل**</u> :

1 ) حساب سعر التوازن وكمية التوازن :

$$Q_d = Q_S \Leftrightarrow 15 - 4P = 6P - 1$$

$$P^* = \frac{16}{10} = 1{,}6$$

$$Q^* = 15 - 4P = 15 - 4(\frac{16}{10}) = 8{,}6$$

2 ) حساب سعر وكمية التوازن عندما فرضت الدولة ضريبة نوعية ( t = 2 )

$$P^* = \frac{a-c}{d+b} + \frac{d}{d-b}t$$

$$P^* = \frac{15+1}{6+4} + \frac{6}{6+4}2 = 2{,}8$$

$$Q^* = \frac{ad+bc}{d+b} - \frac{bd}{d+b}t$$

$$Q^* = \frac{15.6+(-4)}{6+4} - \frac{4.6}{6+4}2 = 3{,}8$$

سعر المستهلك $P^* = P_D = 2{,}8$

سعر المنتج $P_S = P_D - t = 2{,}8 - 2 = 0{,}8$

3 ) سعر التوازن وكمية التوازن عندما تقدم الدولة إعانة إنتاج مقدارها t = 2

$$P^* = \frac{a-c}{d+b} - \frac{d}{d+b}t$$

$$P^* = \frac{15+1}{6+4} - \frac{6}{6+4}2 = 0,4$$

$$Q^* = \frac{ad+bc}{d+b} + \frac{bd}{d+b}t$$

$$Q^* = \frac{15.6+(-4)}{6+4} + \frac{4.6}{6+4}2 = (8,6+4,8 = 13,4$$

$$P^* = P_D = 0,4$$

$$P_S = P_D + t = 0,4 + 2 = 2,4$$

**III ) التسعير الجبري :**

يتخذ تدخل الدولة في مجال تحديد السعر أو التسعير الجبري أحد الشكلين الأول : تحديد حد أقصى للسعر والثاني تحديد حد أدنى للسعر.

**أولا : تحديد حد أقصى للسعر :**

تلجأ الدولة في بعض الحالات إلى تحديد أسعار بعض السلع، وخاصة الإستهلاكية الأساسية وتضع لها حد أقصى بقوة القانون وتلزم المنتجين بعدم البيع بأعلى منها وتقرر عقوبات لمن يخالف ذلك بغض النظر عن سعر التوازن، والجدير بالذكر أن الدولة لا تستطيع أن تفرض أي سعر وإنما تفرض السعر الذي يمكن المنتج من الإستمرار في الإنتاج ولا يعرضه إلى الخسارة أي تحدد الدولة سعرا إجباريا يتناسب مع ما تقدره من المستوى الملائم لنفقات الإنتاج، أما الأسباب التي تدفع بالدولة إلى تحديد حد أقصى للسعر يمكن إجمالها في ما يلي:

1 ـ الرغبة في عدم توجيه جزء كبير من الموارد الإقتصادية للمجتمع لإنتاج السلع الإستهلاكية وإنما توجيهها إلى إنتاج غير استهلاكي أكثر أهمية في الظروف التي تمر بها البلاد كالإنتاج الجزئي.

2 ـ منع استغلال المنتجين أو البائعين للمستهلكين وخاصة الأوقات غير العادية كالحروب والإضطرابات المالية والسياسية.

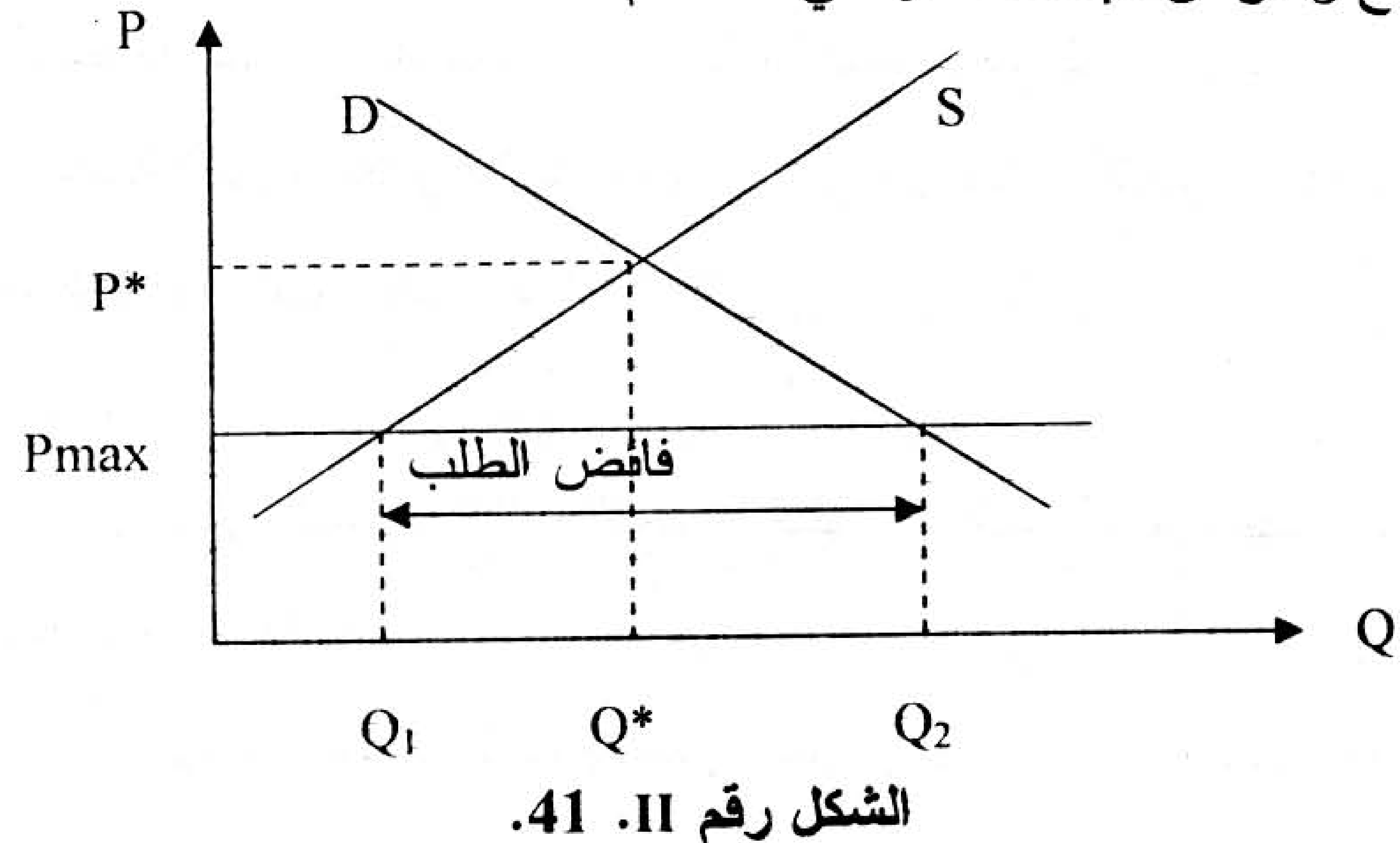
3 ـ في حالة ارتفاع الأسعار أي حينما تتجه نفقات المعيشة نحو الإرتفاع وتعرض الإقتصاد الوطني للتضخم.

الخسارة أي تحدد الدولة سعرا إجباريا يتناسب مع ما تقدره من المستوى الملائم لنفقات الإنتاج، أما الأسباب التي تدفع بالدولة إلى تحديد حد أقصى للسعر يمكن إجمالها في ما يلي:

1 ـ الرغبة في عدم توجيه جزء كبير من الموارد الإقتصادية للمجتمع لإنتاج السلع الإستهلاكية وإنما توجيهها إلى إنتاج غير استهلاكي أكثر أهمية في الظروف التي تمر بها البلاد كالإنتاج الجزئي.

2 ـ منع استغلال المنتجين أو البائعين للمستهلكين وخاصة الأوقات غير العادية كالحروب والإضطرابات المالية والسياسية.

3 ـ في حالة ارتفاع الأسعار أي حينما تتجه نفقات المعيشة نحو الإرتفاع وتعرض الإقتصاد الوطني للتضخم.




**الشكل رقم II. 41.**

في الشكل II. 41 قبل أن تتدخل الحكومة كان سعر التوازن هو P* وكمية التوازن هي Q* وبعد تدخل الحكومة وتحديدها لحد أقصى للسعر $P_{MAX}$ فإن المنتجين سينتجون الكمية Q1 أما المستهلكين فسيطلبون الكمية Q2 **ويمثل الفرق** ( Q2,Q1 ) فائض الطلب.

في بعض الأحيان يكون سعر السوق ( نقصد به سعر التوازن النـــاتج من تلاقي قوى الطلب و العرض ) مرتفعا بالنسبة للمستهلكين وخاصـــة ذوي الدخول المحدودة، ولمعالجة المشكل تتدخل الدولة وتفرض نظـــام البطاقـــات حيث يهدف هذا النظام إلى تمكين المستهلكين ذوي الدخول المحـــدودة مـــن الحصول على قدر من السلعة بسعر معقول.

عند استعمال نظام البطاقات يجب أن لا يتجاوز الإستهلاك الصادر به بطاقات عند السعر $P_{MAX}$ العروض عند نفس السعر وخلال المدة المفروضة وقد يتعارض تحديد حد أقصى للسعر مع مصلحة الإنتاج الوطني، كأن يؤدي تحديد حد أقصى للسعر إلى عدم الاستغلال الأمثل للطاقات الإنتاجية في هذه الحالة تقوم الدولة بتحديد سعرين للسلعة أحدهما منخفض يدفعـــه المســـتهلك لشراء الكمية المحددة له بموجب البطاقة والأخر مرتفع لمن لديـــه إمكانيـــات لشراء كمية أكبر والجدير بالذكر يجب أن يراعي تحديد السعرين الظـــروف الإقتصادية بما يكفل للمشروعات الإستمرارية في الإنتاج.

مثال : في الجدول الآتي الكمية المطلوبة والكمية المعروضة لسلعة ما عند مختلف الأسعار.

1 ــ أرسم منحنى الطلب ومنحنى العرض وحدد سعر وكمية التوازن.

2 ــ إذا فرضت الدولة حد على السعر قدر 12 د.ج = $P_{MAX}$ وقررت البيع بنظام البطاقات عند هذا السعر، فما هي الكمية التي يجب بيعها بنظـــام البطاقات.

3 ــ نفرض أن تحديد حد أعلى للسعر أدى إلى تعطيـــل جـــزء مـــن الطاقات الإنتاجية لو استغلت هذه الطاقات غير المستغلة لغطت الفائض فـــي

1 ) يظهر سعر التوازن من الجدول والرسم 6 د.ج = $P^*$ ، أما كمية التوازن فهي $Q^*=6000$.

2 ) إذا فرضت الدولة حد أعلى للسعر 12 د.ج = $P_{MAX}$ فإن الطلب يكون $Q_D = 8000$.

أما العرض $Q_s=4000$ ويكون فائض الطلب $Q_D - Q_S = 4000$

أما الكمية التي يجب بيعها بنظام البطاقات في 4000 وحدة وهي المقابلة للسعر 12 د.ج = $P_{MAX}$.

3 ) إذا كان السعر المنخفض يساوي 12 دينار فيمكن حساب السعر المرتفع كما يلي:

العرض اللازم لتغطية الطلب عند السعر 12 دينار يساوي $Q_d = Q_S =$ 8000.

يعرض المنتجون عرضا يساوي 8000 وحدة عند السعر $P = 200$ دينار إذن الدخل الإجمالي المطلوب لاستمرارية في الإنتاج هو:

$160000 = 8000 \times 20$.

الدخل من الكمية المباعة بنظام البطاقات هو: $12 \times 4000 = 48000$.

الدخل الواجب الحصول عليه من الكمية الباقية اللازمة لتغطية الفائض في الطلب عند السعر Pmax هو: 160000 ـــ 480000 =112000 دينار.

سعر بيع الوحدة هو: $112000 \div 4000 = 28$ دينار.

إذن السعر المنخفض هو 12 دينار والسعر المرتفع هو 28 دينار وللتأكد من الإيرادات معادلة للمبلغ الذي يمكن من الاستمرار في الإنتاج نحسب كما يلي:

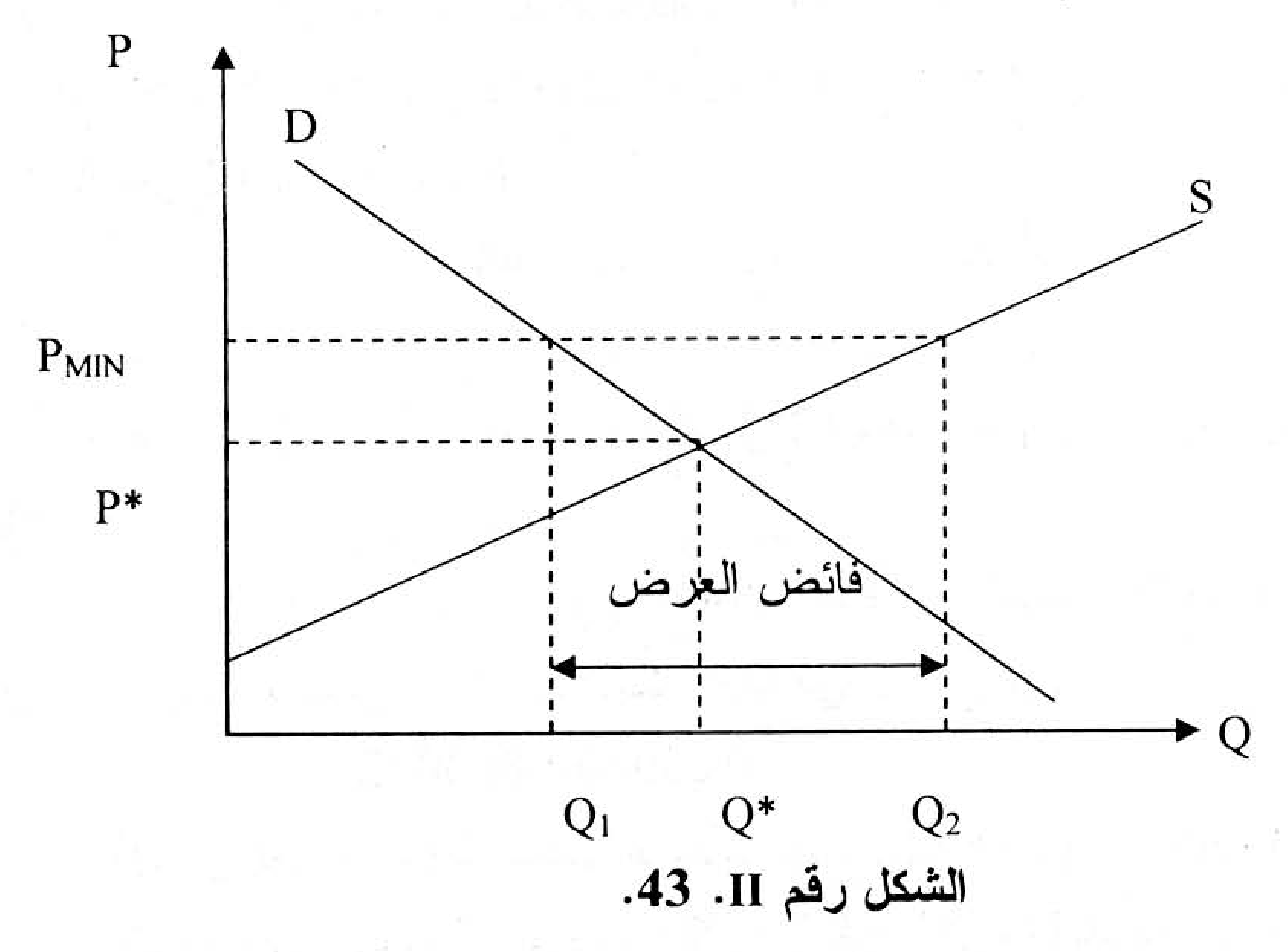
$$160000 = 4000 \times 28000 + 4000 \times 12$$

كمية مباعة بنظام البطاقات — كمية مباعة خارج نظام البطاقات

ملاحظة: الجدير بالذكر في هذا المقام هو التذكير بان تحديد حدا أعلى أعلى للسعر يؤدي إلى وجود سوق سوداء تباع فيها المنتجات بأسعار تخالف الأسعار المحددة قانونا مما يتطلب تشديد الرقابة.

**ثانيا: تحديد حد أدنى للسعر**

تتدخل الحكومة في بعض الأحيان فتحدد حد أدنى للسعر الذي يمكـــن التعامل به في بعض السلع والخدمات وأهم حالات تحديد حد أدنى للسعر هي حالة الأجور أي خدمة العمل باعتبارها خدمة إنتاجية.




**الشكل رقم II. 43.**

ففي الشكل رقم II، 43 كان سعر التوازن *P وكمية التوازن *Q قبـــل تدخل الدولة، أما بعد تدخل الدولة وتحديدها لحد أدنى للسعر $P_{min}$ فإن الكمية المطلوبة هي Q1 والكمية المعروضة Q2 أما الفرق ( Q2 - Q1 ) يمثل فائض العرض.

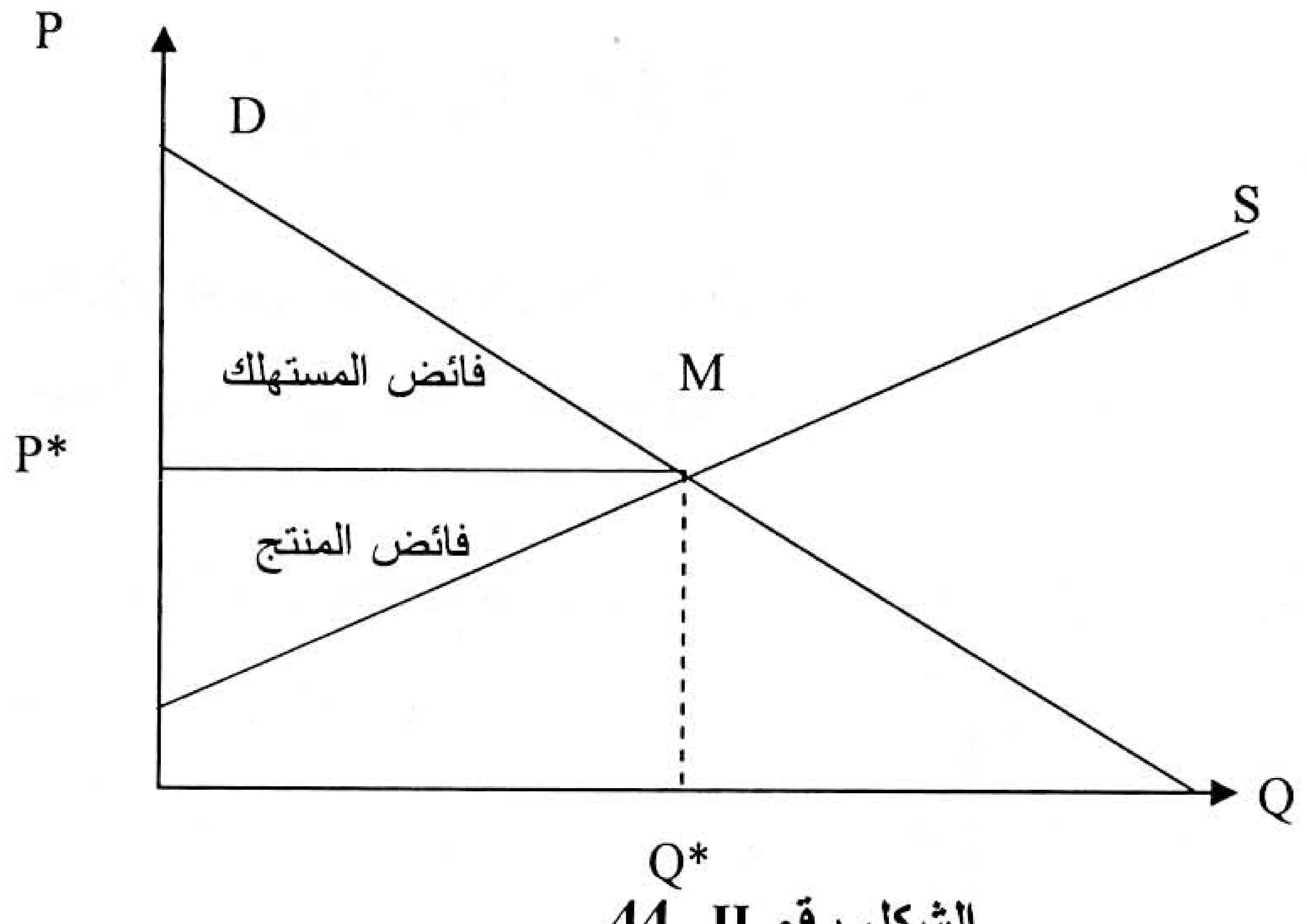
**IV – تطبيق فائض المستهلك وفائض المنتج عند تدخل الحكومة في الأسواق :**

**فائض المستهلك وفائض المنتج :**

إن المستهلك عادة يدفع قيمة أقل من أجل شراء سلعة من القيمة الأكثر والتي من المفروض يجب أن يدفعها بدلا عن التخلي عن استهلاكها ويمثـــل

الفرق بين الأسعار المرغوبة من قبل المستهلك والقادر على دفعها والسعر الفعلي المدفوع *P فائض المستهلك.

أما المنتج يرغب في إنتاج السلع بأسعار أقل من *P لكن شروط السوق تسمح له ببيع منتوجاته بسعر أعلى.




**الشكل رقم II. 44.**

**<u>1 ـ حساب فائض المستهلك</u> :**

**<u>إذا كان تابع الطلب تابعا خطيا</u> :**

**الشكل رقم II. 45.**

أ ــ إذا كان تابع الطلب تابعا خطيا $Q_D = a - bp$ فيمكن حساب فائض المستهلك بالطريقة الهندسية.

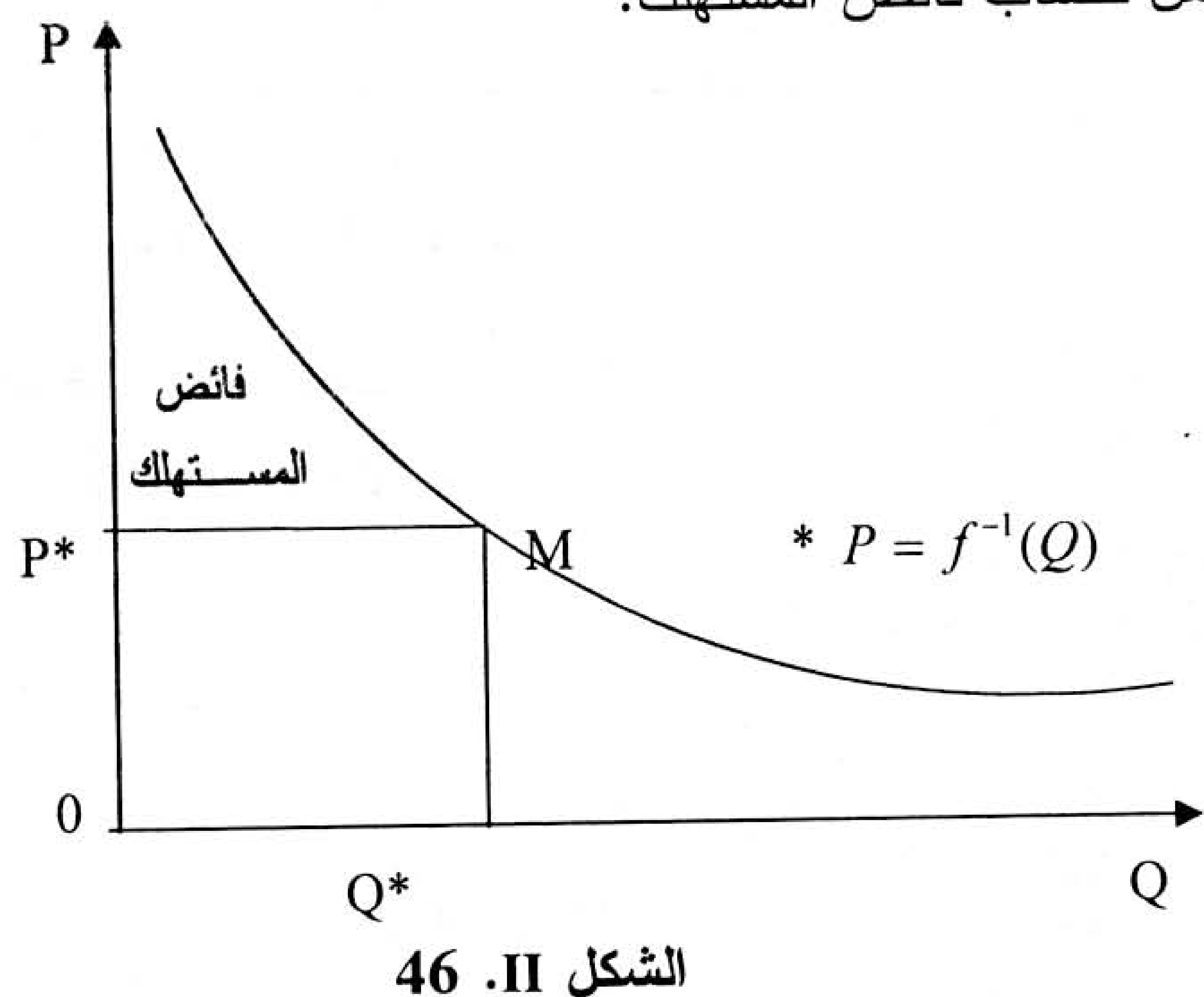
فائض المستهلك = مساحة المثلث NEM

فاض المستهلك = 1/2 القاعدة × الإرتفاع.

$= 1/2 \cdot (EM) \cdot (EN)$

**ملاحظة** : يمكن استخدام طريقة التكامل التابع الخطي، وسنتعرض لهذه الطريقة عندما يكون تابع الطلب غير خطي.

ب ــ إذا كان لدينا تابع طلب غير خطي فإنه من الممكـــن اســـتعمال التكامل لحساب فائض المستهلك.




**الشكل II. 46**

استعملنا $P = f^{-1}(Q)$ بدلا من $Q = f(p)$ لأننا قلنا سابقا غالبـــا مـــا يفترض لدالة الطلب معكوس ( أرجع إلى الطلب ).

إذا فرضنا : $P = \Psi(Q) = f^{-1}(Q)$ أن Q* تمثل الكمية المطلوبة

عندما يكون السعر P* فإن فائض الطلب يمكن حسابه بالصيغة.

$$C_S = \int_0^{Q^*} \Psi(Q)dQ - P^*Q^*$$

**مثال 1** : إذا كانت دالة الطلب

$$Q_D = f(Q) = \frac{1}{16P^2}$$

وإذا كانت P* = 0, 05 ، Q* = 25 أحسب فائض المستهلك.

**الحل** : حساب فائض المستهلك.

**لدينا** :

$$\Psi(Q) = f^{-1}(Q) = \frac{1}{4\sqrt{Q}}$$

$$C_S = \int_0^{25} \frac{1}{4\sqrt{Q}} dQ - P^*.Q^* = 2{,}5 - 1{,}25 = 1{,}25$$

**مثال 2** :

إذا كانت دالة الطلب P=10 - Q

أحسب فائض المستهلك عندما Q*=6, P*=4

**الحل** :

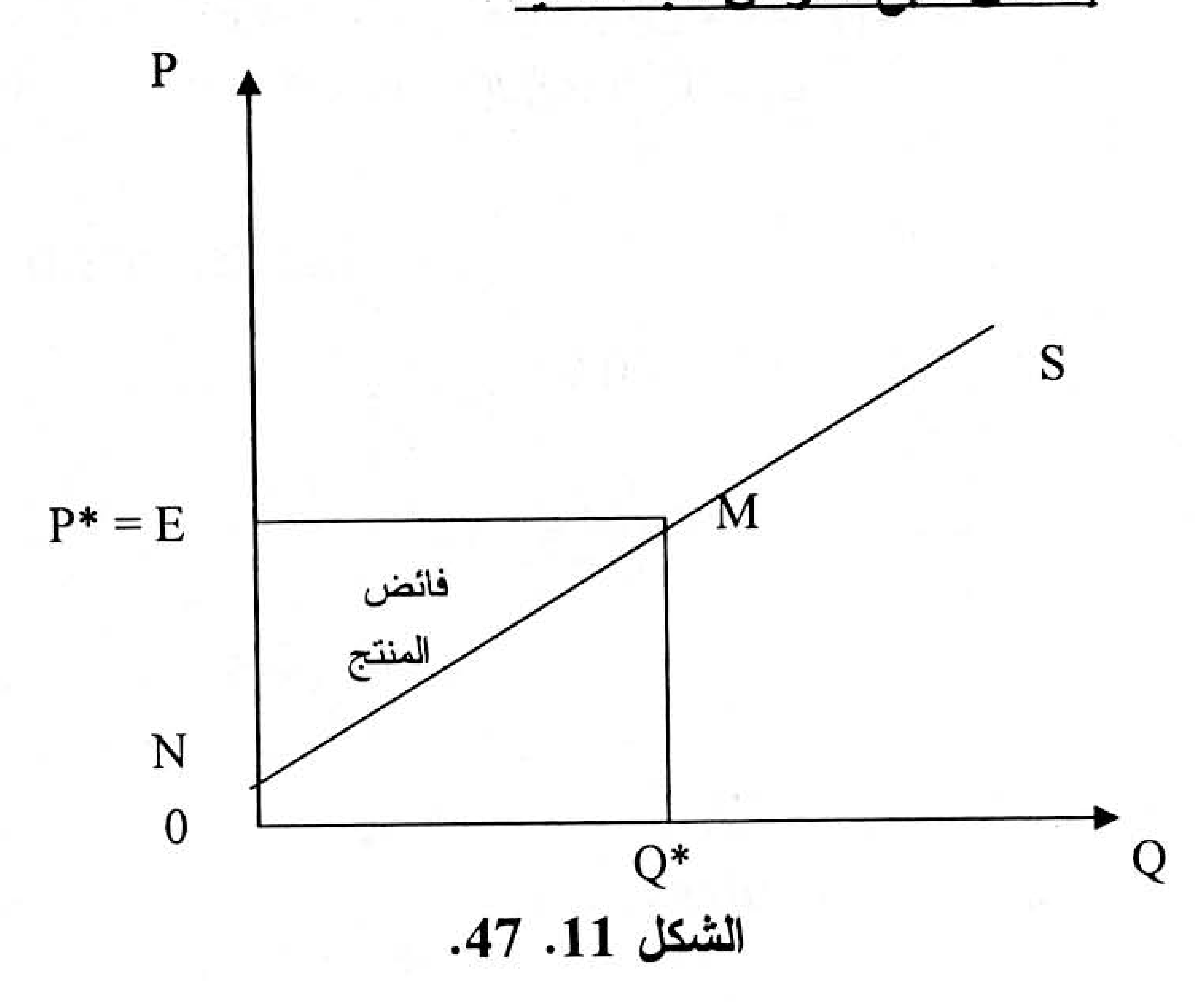
$$C_S = \int_0^6 (10 - Q)dQ - P^*Q^*$$

$$C_S = \left[10Q - \frac{Q^2}{2}\right]_0^6 - P^*Q^*$$

$$CS = 42 - 24 = 18$$

## 2 ـ حساب فائض المنتج :

### إذا كان تابع العرض تابعا خطيا :




**الشكل 11. 47.**

إذا كان تابع العرض تابعا خطيا $Q_S = c + dp$ فيمكننا حساب فائض المنتج بالطريقة الهندسية فائض المنتج = $1/2$ القاعدة × الإرتفاع

كما يمكننا استعمال طريقة التكامل التي سنتعرض لها عندما يكـــون تابع العرض غير خطي.

### إذا كان تابع العرض غير خطي :

إذا كان لدينا تابع العرض غير خطي $P = \Psi'(Q)$ فإنه من الممكن استعمال التكامل في حساب فائض المنتج. $PS = P^*.Q^* - \int_0^{Q+} \Psi'(Q)dQ$

**ملاحظة** : قد يتغير فائض المستهلك أو فائض المنتج نتيجة التغير في الأسعار مثال ذلك :

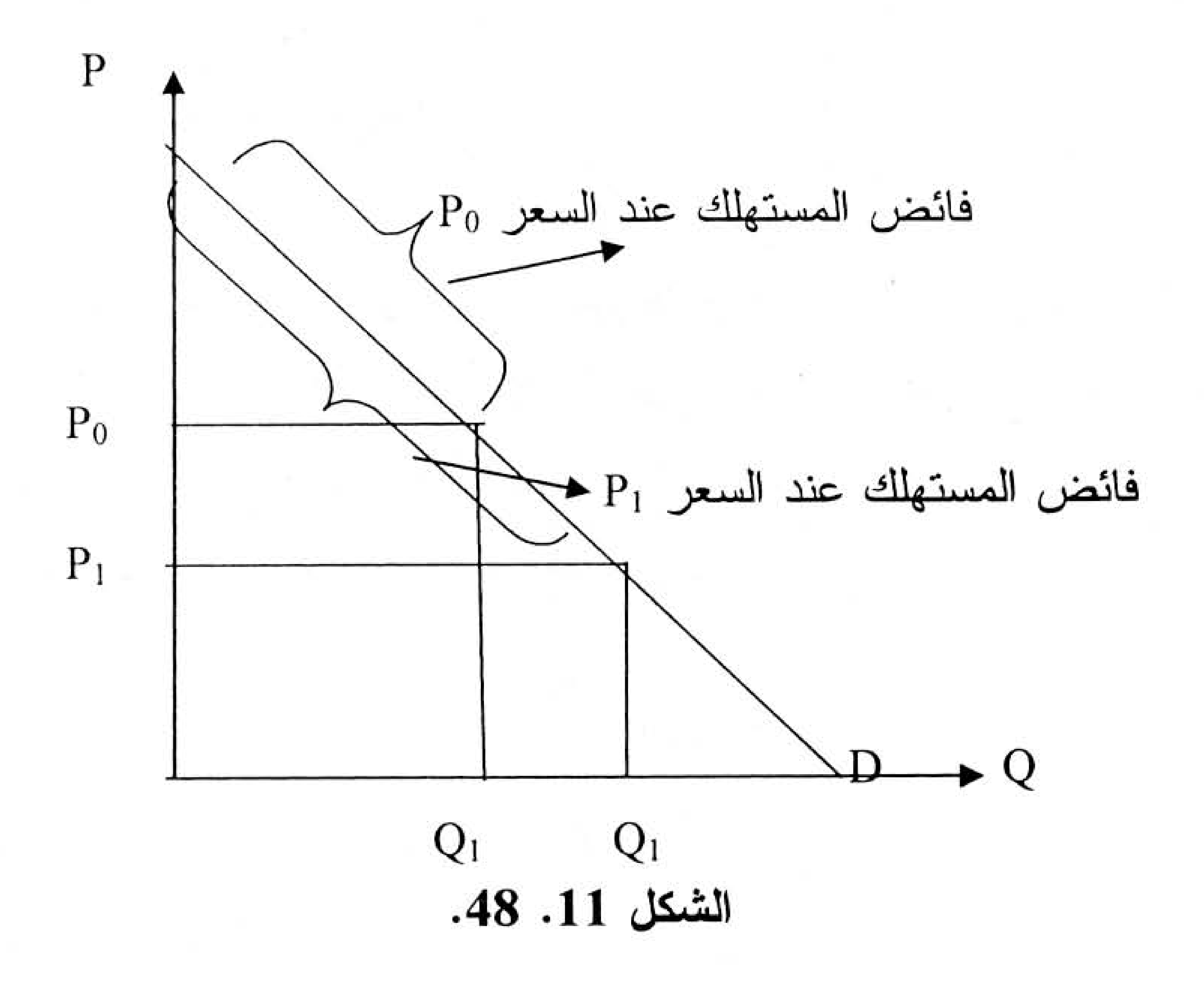
1 ) إذا كان تابع الطلب هو $P = \Psi(Q)$ فإنه عند السعر $P_0$ والكمية $Q_0$

يكون فائض المستهلك $CS = \int_0^{Q0} \Psi(Q)dQ - P_0.Q_0$ .

فإذا فرضنا أن المستهلك اكتسب فائضا من انخفاض في الأسعار من $P_0$ إلى $P_1$ مع زيادة في الكميات من $Q_0$ إلى $Q_1$

فإن التغير في فائض المستهلك سيكون :

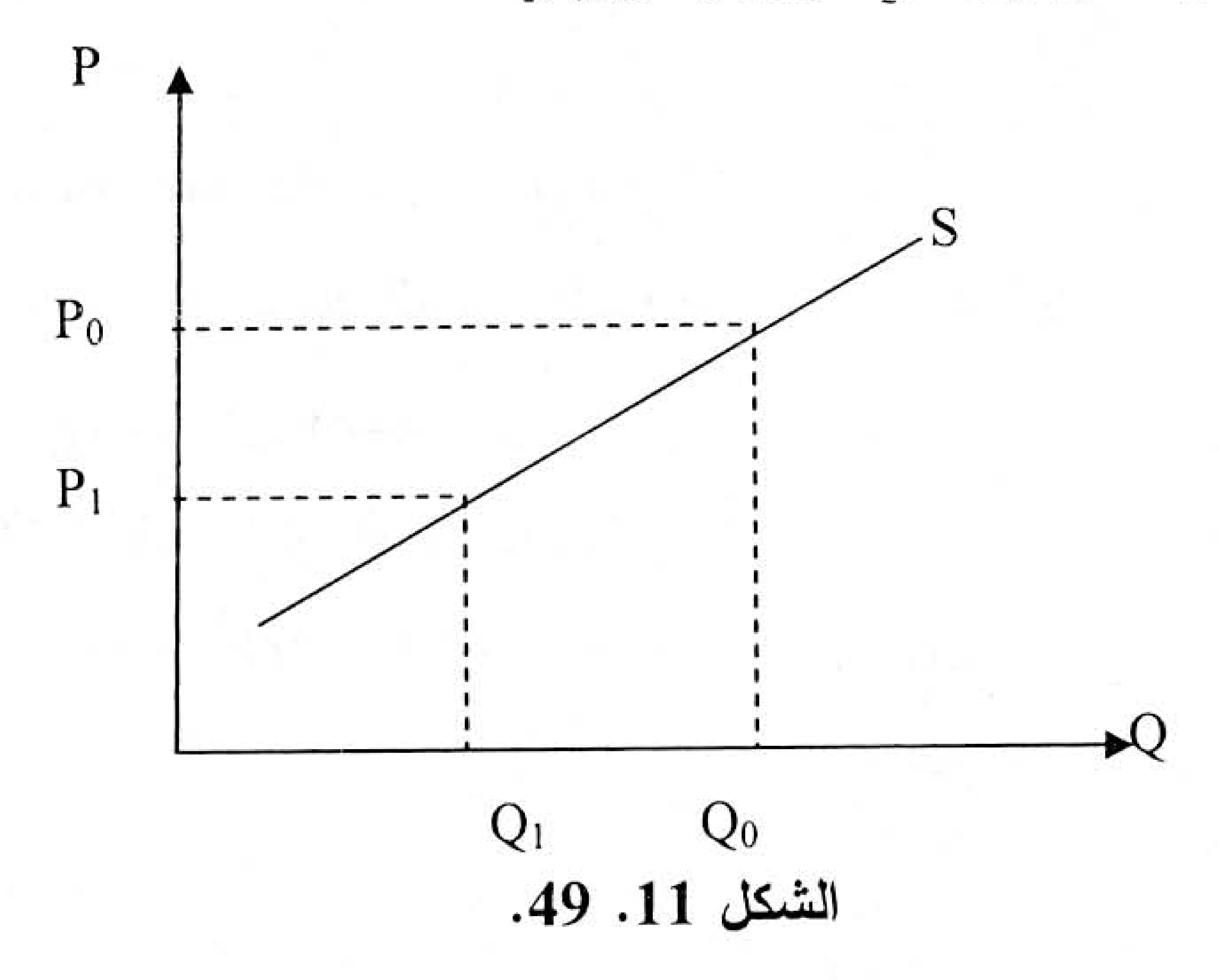
$$\Delta.CS = \int_{Q0}^{Q1} \Psi(Q)dQ - (P_1Q_1 - P_0Q_0)$$




**الشكل 11. 48.**

2 ) ـ إذا كان تابع العرض هو $P = \Psi(Q)$ فإنه عند السعر $P_0$ ، $Q_0$ يكون فائض المنتج $PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q1} \Psi(Q)dQ$

فإذا فرضنا أن السعر تغير من $P_0$ ، $P_1$ والكمية تغيرت من $Q_0$ إلى $Q_1$ فإن التغير في فائض المنتج يمكن حسابه بالصيغة التالية : $\Delta PS = [(P_0Q_0)-(P_1Q_1)] - \int_{Q1}^{Q0} \Psi(Q)dQ$




**الشكل 11. 49.**

3 ) ـ يمكننا حساب التغير الحاصل في فائض المستهلك أو فائض المنتج بصيغ التغير السابقة Δ CS أو Δ PS في حالة تدخل الدولة بفرض ضريبة أو تقديم إعانة أو تحديد السعر الجبري.

4) يمكننا استخدام الطريقة الهندسية لحساب Δ CS أو Δ PS .

**<u>مثال</u> :**

إذا كان تابع الطلب على سلعة ما P= - Q+9

1 ) أرسم منحنى الطلب.

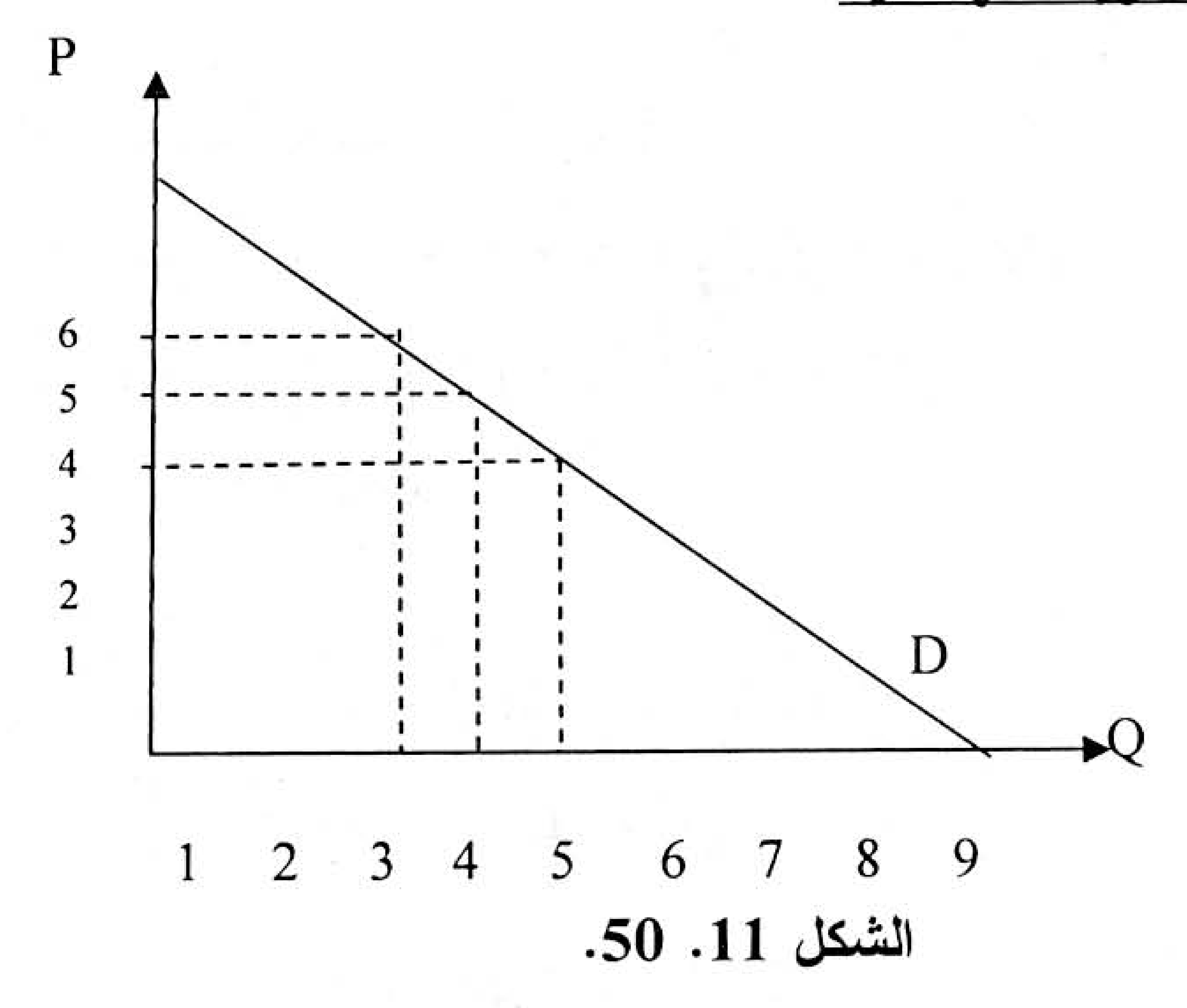
2) أحسب إنفاق المستهلك وفائضه عند السعر P = 5

3 ) إذا ارتفع السعر فأصبح P = 6 أحسب إنفاق المستهلك وفائضه **ومقدار التغير في فائض المستهلك.**

4) أحسب إنفاق المستهلك عندما 4 = P وما هو مقدار التغيــر فـــي فائض المستهلك عندما ينخفض السعر من 5 = P إلى 4 = P.

**<u>الحل</u> :**

**<u>الطريقة الهندسية</u> :**




**الشكل 11. 50.**

2 ) إنفاق المستهلك عندما 5 = P، 4 = Q

إنفاق المستهلك = السعر × الكمية

$$= 5 \times 4 = 20$$

فائض المستهلك = 1/2 القاعدة × الارتفاع

$$\times \frac{1}{2} (4) ( 9 - 5 ) = 8$$

3) عندما 6 = P فإن إنفاق المستهلك يكون.

إنفاق المستهلك = السعر × الكمية

$$= 6 \times 3 = 18$$

**أي ينخفض إنفاقه**

فائض المستهلك = $\frac{1}{2}$ ( 3 ) ( 9 - 6 ) = 4,5 أي انخفض فائض المستهلك حيث :

$\Delta CS = 8 - 4,5 = 3,5$ وهو مقدار التغير في فـائض المســتهلك بالنقصان.

4 ) إنفاق المستهلك عندما P = 4 ، Q = 5

الإنفاق = السعر × الكمية = 4 × 5 = 20 أي ارتفع الإنفاق.

فائض المستهلك = 1/2 (5) ( 9 ــ 4 ) = 12,5

$\Delta CS = 12,5 - 8 = 4,5$

**طريقة التكامل :**

2) عندما P = 5 ، Q = 4 فإن فائض المستهلك

$$CS = \int_0^4 (-Q+9)dQ - (5.4) = \left[ -\frac{1}{2}Q^2 + 9Q \right]_0^4 - 20$$

$$CS = \left[ -\frac{1}{2}(4)^2 + 9(4) - 0 \right] - 20$$

$$CS = -8 + 36 - 20 = 8$$

3 ) عندما P = 6 ، Q = 3

$$\Delta CS = \int_{Q0}^{Q1} \Psi(Q)dQ - (P_1Q_1 - P_0Q_0)$$

لدينا :

$$P_0 = 5 \rightarrow Q_0 = 4$$

$$P_1 = 6 \rightarrow Q_1 = 3$$

$$\Delta CS = \int_4^3 (-Q \quad 9)dQ - (P_1Q_1 - P_0Q_0)$$

$$\Delta CS = \left[ -\frac{1}{2}Q^2 \quad Q \right]_4^3 - [6,3 - 5,4]$$

$$\Delta CS = \left[ -\frac{1}{2}(3)^2 + 9(3) \right]_4^3 - \left[ \frac{-1}{2}(4)^2 + 9(4) \right] + 2$$

$$\Delta CS = (-4{,}5 + 27) - (-8 + 36) + 2$$
$$\Delta CS = +22{,}5 - 28 + 2 = -3{,}5$$

آي أنه بارتفاع السعر من $P_0 = 5$ إلى $P_1 = 6$ فإن فائض المستهلك انخفض بمقدار 3,5، أي أصبح يساوي 4,5 بدلا من 8.

4 ) عندما انخفض السعر العرض $P_0 = 5$ إلى $P_1 = 4$ زادت الكمية من $Q_0 = 4$ إلى $Q_1 = 5$ فإن التغير في فائض المستهلك كان كالتالي:

$$\Delta CS = \int_{Q0}^{Q1} \Psi(Q)dQ - (P_1Q_1 - P_0Q_0)$$
$$\Delta CS = \int_4^5 (-Q + 9)dQ - (P_1Q_1 - P_0Q_0)$$
$$\Delta CS = \left[ -\frac{1}{2}Q^2 + 9Q \right]_4^5 - (P_1Q_1 - P_0Q_0)$$
$$\Delta CS = \left[ -\frac{1}{2}(25) + 9(5) \right] - \left[ -\frac{1}{2}(16) - 9(4) \right] - (4.5) - (5.4)$$
$$\Delta CS = (-12{,}5 + 45) - (-8 + 36)$$
$$\Delta CS = -48{,}5 + 53$$
$$\Delta CS = 4{,}5$$

بما أن $Cs = 8$ عندما $P = 5$ فإن $Cs = 8 + 4{,}5 = 12{,}5$ عندما $P = 4$ أي أن انخفاض السعر أدى إلى زيادة فائض المستهلك.

نلاحظ في مثالنا السابق بما يلي :

أ ــ لقد أعطانا تطبيقنا للطريقتين الهندسية و التكاملية نفس النتائج.

ب ــ لقد أعطينا في المثال ثلاث أسعار مختلفة 4 ، 5 ، 6 وغيرنا في السعر مرة بالزيادة من 5 إلى 6 وأخرى بالتخفيض من 5 إلى 4 حتى نعطي فكرة للدارس عن كيفية تدخل الدولة وفائض المستهلك عند تدخلها لأننا نعلم أن الضريبة تؤدي إلى رفع السعر، وأن الإعانة تؤدي إلى تخفيض السعر كما أن تحديد حد أقصى للسعر يكون أقل من السعر التوازني وتحديد حد أدنى للسعر يكون أكبر من السعر التوازني.

ج ـ يمكننا معاملة فائض المنتج بنفس الطريقة مع تطبيق ΔPS التي قدمناها سابقا.

## V ـ التوازن الحركي:

إذا أدخلنا عنصر الزمن في النماذج أي ركزنا اهتمامنا ليس فقط حول نقطة الوصول وإنما كذلك حول الاتجاه نحو هذه النقطة تصبح هذه النماذج حركية ونفرق بين النماذج الحركية من حيث الاستمرار والتقطع (الوثوب).

**النماذج الحركية المستمرة** : تتميز بالتتابع المستمر في المتغيرات الإقتصادية .

**النماذج الحركية المتقطعة ( الواثبة )** : تتميز بانتقال النشاط الإقتصادي موضوع البحث من وضع توازني إلى وضع توازني آخر في وقت آخر ( النموذج العنكبوتي ).

وسنتناول النموذجين فيما يلي :

### 1 ـ النموذج الحركي المتقطع ( النموذج العنكبوتي ) :

لقد قلنا سابقا يخضع عرض المحصولات إلى نوع من الثبات النسبي وذلك لضرورة إنقضاء مدة بين بذور جني المحصول، فعندما يقترب ميعاد جني المحصول ويتضح أن أسعار السلع سوف ترتفع أو تنخفض فلا يمكن للمزارعين الإستجابة بسرعة للتغير في الأسعار وزيادة الكمية المعروضة في السوق أو إنقاصها حسب اتجاه الأسعار والسبب في ذلك ما يتطلبه إعداد الأرض وزراعتها وجني المحصول من وقت وكذلك صعوبة تخزين المنتجات الزراعية.

إذا كان اتجاه الأسعار في الإرتفـاع خـلال موسـم زراعـي فـإن المزارعين يزيدون من عرضهم خلال الموسم الزراعي الموالي ولكن خلال هذا الموسم الأخير تنخفض الأسعار بسبب العرض الكبير وصعوبة التخزين مما يدفع بالمزارعين إلى تقليص المساحات المزروعة خلال الموسم الموالي مما يؤدي إلى ارتفاع الأسعار بسبب انخفاض الكميات المعروضة.

نلاحظ من خلال ما تقدم وجود حركات دورية منتظمة إلى حد كبيـر في أسعار وكميات كثيرة من المنتجات الزراعية.

إن النموذج العنكبوتي ( نموذج كوب وأب ) الحركي المتقطع يساعدنا على تفهم توازن السوق واستقراره حيث يمثل منحنى الطلب العلاقـة بـين الكمية المعروضة من السلعة في أي سنة والسعر الذي يجب أن تباع به من أجل تخليص السوق منها ويمثل منحنى العرض العلاقة بين السعر السـائد في أي سنة والكمية التي ستنتج من السلعة خلال السنة التالية :

<u>مثال</u> : النموذج التالي يمثل نموذج سوق سلعة زراعية.

طلب غير متأخر $Q_{Dt} = a - bp_t = 4100 - 2P_t$

عرض متأخر متباطئ $Q_{St} = c + bp_{t-1} = -100 + 0,4P_{t-1}$

يحدث التوازن في هذا النموذج عندما $Q_{Dt} = Q_{St}$

نلاحظ أن هذا النموذج يدخل أثر الزمن على المتغيـرات موضـوع البحث حيث يتبين من تابع الطلب أن طلب السلعة في فترة زمنية يعتمد على سعرها في نفس الفترة بينما يتوقف عرضها في فترة معينة على السعر فـي فترة سابقة.

لحل هذا النموذج أي لتتبع حركة السوق من فترة زمنية إلى فترة زمنية أخرى يجب أن يكون معروفا لدينا عرضها في فترة زمنية معينة

لنفرض عرض سلعة معينة في فترة زمنية معينة يساوي 500 وحدة.

$$Q_{Dt} = Q_{St} = 500 = 4100 - 2P_t$$

نحدد السعر عند المستوى الذي يجعل $Q_{Dt} = 500$

$$P_t = \frac{4100 - 500}{2} = 1800$$

وعلى أساس هذا السعر يتحدد العرض في الفترة القادمة.

$$Q_{St} = -100 + (0,4)P_{t-1} = -100 + 0,4.1800 = 620$$

ويجب أن يتحدد السعر في الفترة القادمة عند المستوى الذي يجعل الطلب مساويا إلى 620 وحدة.

$$Q_{St} = Q_{Dt} = 620 = 4100 - 2P_t$$

$$P_t = \frac{4100 - 620}{2} = 1740$$

وعلى أساس هذا السعر يتحدد العرض في الفترة التالية

$$Q_{St} = -100 + 0,4.1740 = 596$$

ويجب أن يتحدد السعر في هذه الفترة الأخيرة عند المستوى الذي يجعل الطلب مساويا إلى 596 وحدة.

$$Q_{St} = Q_{Dt} = 4100 - 2P_t = 596$$

$$P_t = \frac{4100 - 596}{2} = 1752$$

وهكذا ينتقل السوق من وضع توازني معين في فترة زمنية معينة إلى وضع توازني جديد في فترة زمنية مستقبلية.

في الواضح أن اقتراب المتغيرات الداخلية من القيم التي تجعل النموذج في حالة سكون يتوقف على درجة مرونة كلا من الطلب والعرض بغض النظر عن اختلاف الفترة الزمنية في الدالتين وعلى إمكان تأثر هذه المتغيرات بالعوامل الخارجية.

إذن نقطة السكون هي:

$$4100-2P=-100+0,4P$$
$$P^*=4200/2,4=1750$$

إما:

$$Q^*=4100-2P=4100-2\times1750=4100-3500$$
$$Q^*=600$$

ولدراسة استقرار هذا النموذج نميز ثلاث حالات:

ـ إذا كانت مرونة الطلب أكبر من مرونة العرض تقترب المتغيرات الداخلية من القيم التي تجعل النموذج في حالة سكون أي النموذج مستقر.

ـ إذا كانت مرونة الطلب أصغر من مرونة العرض فإن النموذج غير مستقر.

ـ إذا كانت المرونات متساوية تبقى تقلبات السعر والكميات بنفس المعدل بذلك لا تقترب من السوق ولا تبتعد عن الوضع التوازني الساكن

يمكننا حل النموذج السابق.

$$Q_{Dt}=a-bP_t$$ حيث $b\rangle0$

$$Q_{St}=c+bP_{t-1}$$ حيث $b\rangle0$

$$Q_{Dt}=Q_{St}$$
$$Q_{Dt}=Q_{St}\Leftrightarrow a-bp_t=c+dp_{t-1}$$
$$bp_t+dp_{t-1}=a-c$$
$$p_t+\frac{d}{b}p_{t-1}=\frac{a-c}{b}$$

وهي معادلة فرق من الدرجة الأولى على صيغة $p_t+\alpha p_{t-1}=B$ لها حل عام وحل خاص عندما $\alpha\neq-1$ وكذلك عندما $\alpha=-1$ ( أرجع إلى معادلات الفروق ).

إذن: $p_t+\frac{d}{b}p_{t-1}=\frac{a-c}{b}$ معادلة فرق من الدرجة الأولى حيث:

$$\alpha = \frac{d}{b}$$

$$B = \frac{a-c}{b}$$

إذا كان $P_0$ معروف، $\alpha \neq -1$ مثل معادلة الفرق التي بين يـــدينا فهناك حل خاص ونهائي لمعادلة الفرق هذه هو:

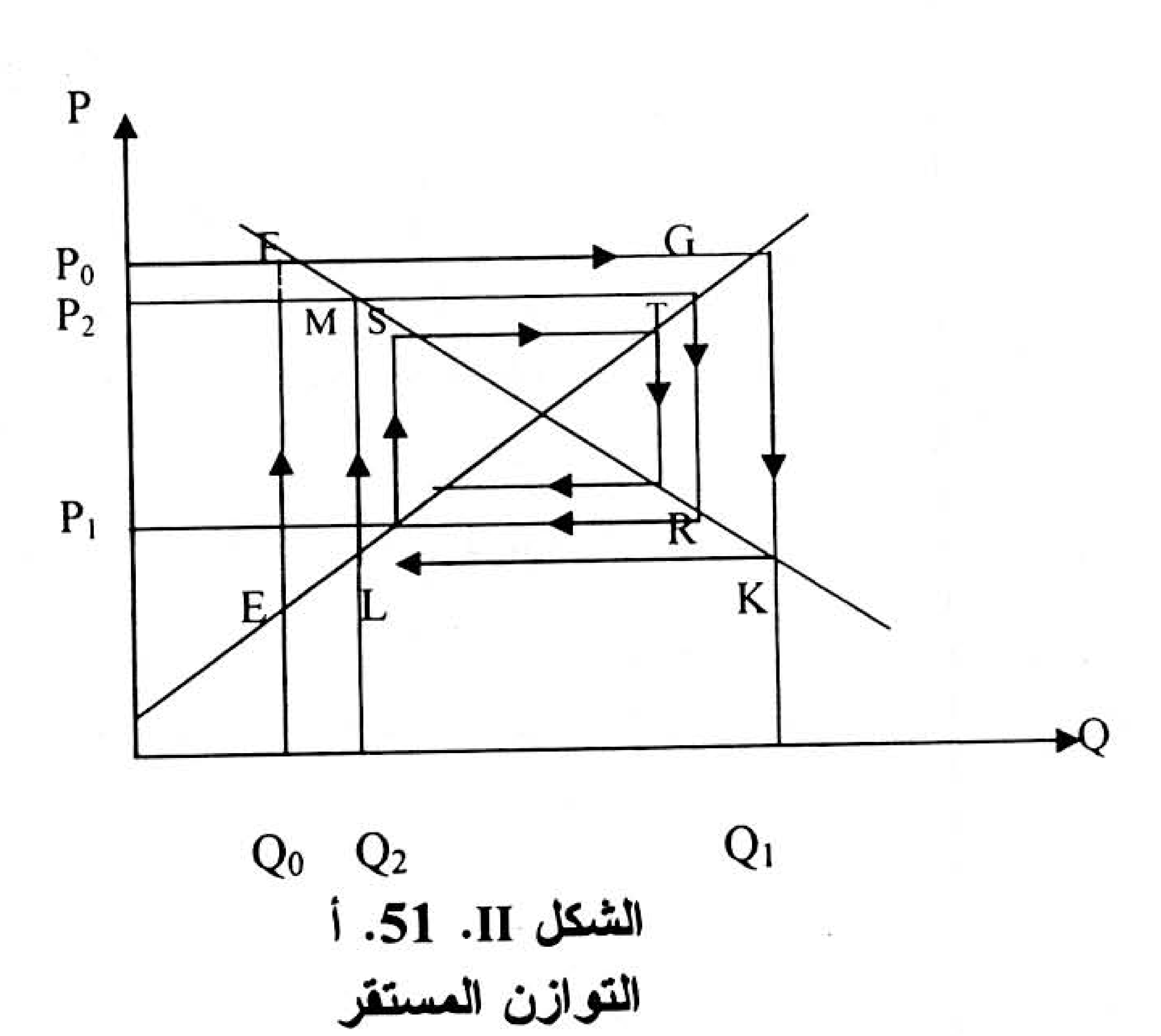
$$p_t = \left[ P_0 - \frac{B}{1+\alpha} \right] (-\alpha)^t + \frac{B}{1+\alpha}$$

حيث:

$$p^* = \frac{B}{1+\alpha}$$

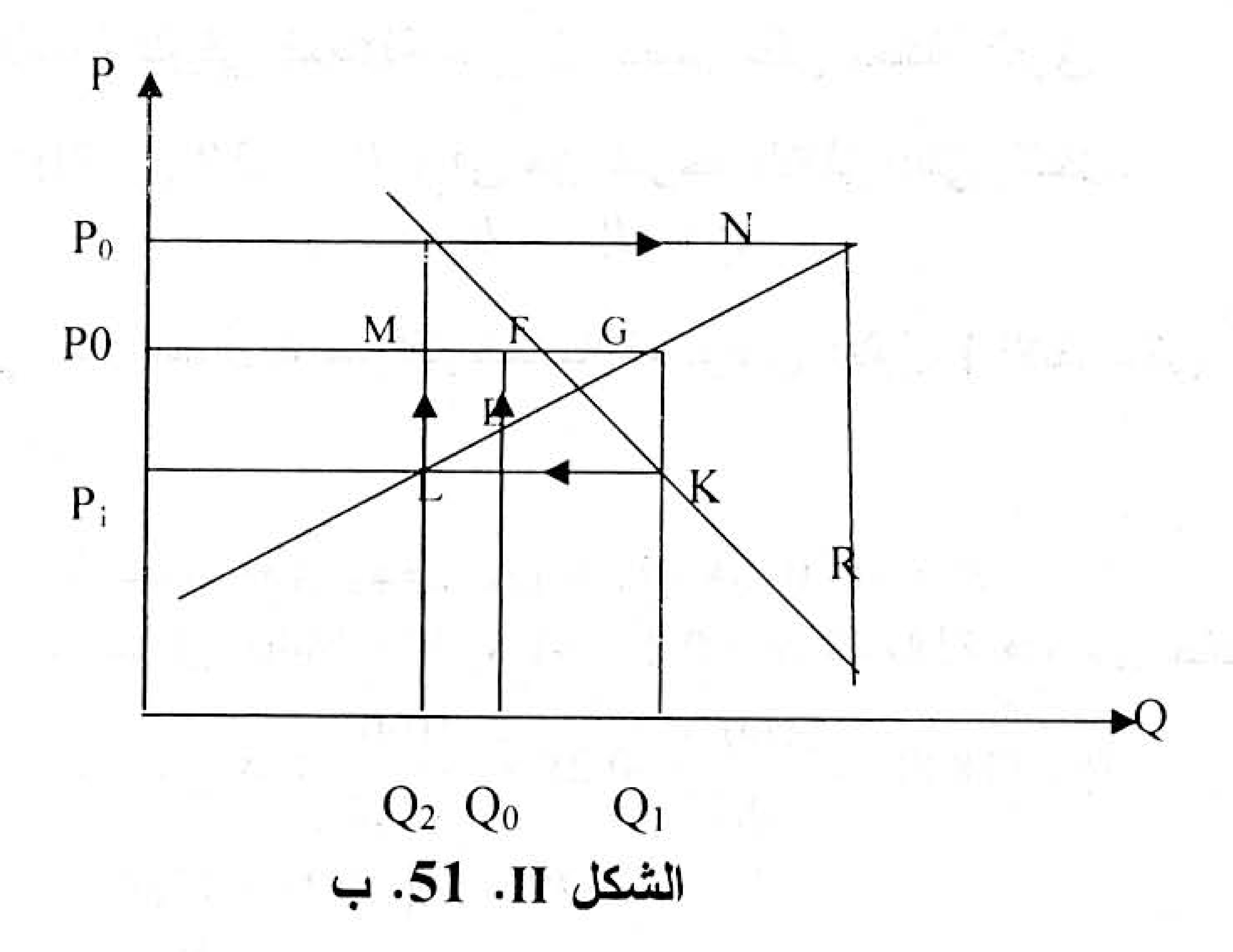
وحيث يصف حل المعادلة هذه مساو السعر بدلالة الزمن.

لقد قلنا هناك حركات دورية منتظمة إلى حد كبير في أسعار وكميات كثير من المنتجات الزراعية وقد وجد رسم هندسي لتحليل مثل هذه الدورات يعرف بإسم النسيج العنكبوتي ( أنظر الأشكال الآتية ).

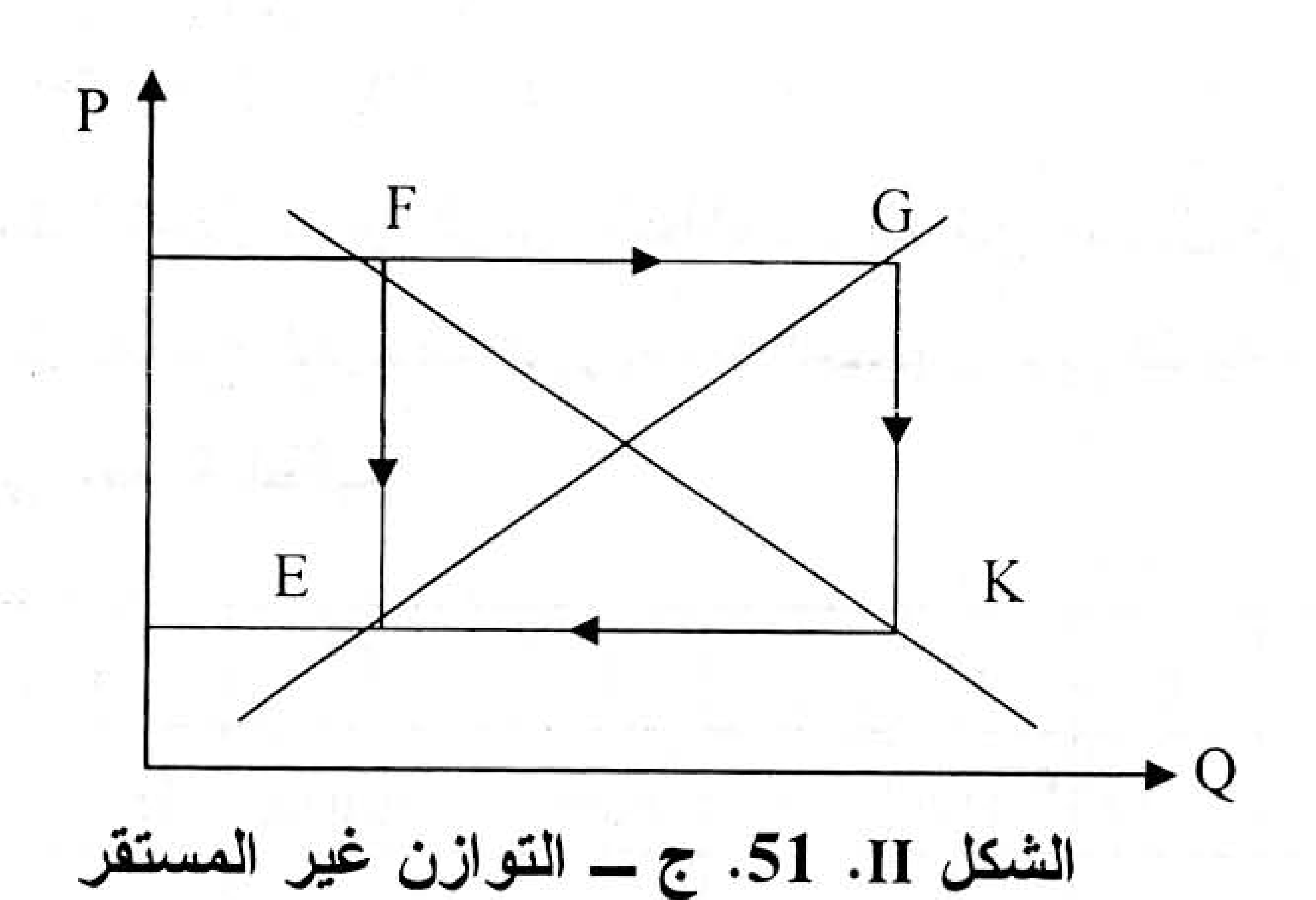



**الشكل II. 51. أ**

**التوازن المستقر**




الشكل II. 51. ب




الشكل II. 51. ج ـ التوازن غير المستقر

**ففي مثالنا السابق:**

$$Q_{Dt} = 4100 - 2P_t$$
$$Q_{St} = -100 + 0{,}4P_{t-1}$$

لدينا:

$Q_{Dt} = Q_{St} \Leftrightarrow 4100 - 2P_t = -100 + 0{,}40P_{t-1}$

$2P_T + 0{,}4P_{t-1} = 4200$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 نحصل على معادلة الفرق

$P_t + 0{,}2P_{t-1} = 2100$ وهي من الدرجة الأولى على الشكل:

$$P_t + \alpha P_{t-1} = B$$

في هذا المثال لمـــا افترضـــنا العـــرض الأول ( الإبتـــدائي ) هـــو $Q_{St} = 500$.

وجدنا السعر الذي يجعل $Q_{Dt} = Q_{St}$ هو $P_0 = 1800$

و بما أن $P_0 = 1800$ ، $\alpha = 0{,}2 \neq -1$ للمعادلة هذه حل خاص

ونهائي هو : $P_t = \left[1800 - \frac{2100}{1+0{,}2}\right](-0{,}2)^t + \frac{2100}{1+0{,}2}$

حيث: $P^t = 50(-0{,}2)^t + 1750$

$P^* = \frac{B}{1+\alpha} = 1750$ وهو ما حصلنا عليه سابقا عند حل المثال مـــن المعادلة $P_t = 50(-0{,}2)^t + 1750$

يمكننا تمثيل مسار الزمن بإعطاء قيم للمتغير المتمثل في الـــزمن t، يمكننا تمثيل نموذج الحركات الدورية بعد الحصول على الكمية Q بالتعويض عن $P_T$ فقي معادلة الطلب.

| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | t ⟶ α |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Pt | 1800 | 1740 | 1752 | 1749,6 | 1750,0016 | Pt ⟶ 1750 |
| Q | 500 | 620 | 596 | 600,8 | 599,9968 | Q ⟶ 600 |

في مثالنا السابق مرونة الطلب أكبر من مرونـــة العـــرض أي ميـــل منحنى الطلب أكبر من ميل منحنـــى العـــرض ( كـــلا بالقيمـــة المطلقـــة ) $|d| \rangle |b|$ وبالتالي تقترب المتغيرات الداخلية من القيم التي تجعل النمـــوذج في حالة سكون ( توازن مستقر ).

$$\lim_{t \to \alpha} P_t = P^*$$

يمكن تلخيص الحالات المذكورة السابقة في ما يلي:

1 ) إذا كان لدينا النموذج من الشكل :

حيث: $Q_{Dt} = a - bP_t \qquad b\rangle 0$

وحيث: $Q_{St} = c + bP_{t-1} \qquad b\rangle 0$

$Q_{Dt} = Q_{St}$

فإنه:

أ) إذا كانت $b\rangle d$ فإن التوازن مستقر.

ب) إذا كانت $b\langle d$ فإن التوازن غير مستقر

ج) إذا كان $b = d$ فإن التوازن غير مستقر ( محايد ).

2 ) إذا كان لدينا النموذج من الشكل :

حيث: $P_t = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}Q_{Dt} \qquad b\rangle 0$

وحيث: $P_{t-1} = -\frac{c}{b} + \frac{1}{b}Q_{St} \qquad b\rangle 0$

$Q_{Dt} = Q_{St}$

فإنه:

أ) إذا كانت $\frac{1}{d}\rangle\frac{1}{b}$ فإن التوازن مستقر.

ب) إذا كانت $\frac{1}{d}\langle\frac{1}{b}$ فإن التوازن غير مستقر

ج) إذا كان $\frac{1}{d} = \frac{1}{b}$ فإن التوازن غير مستقر ( محايد ).

**2 ـ <u>النموذج الحركي المستمر</u> :**

يتحقق توازن السوق عندما تتعادل الكمية المعروضة من السلعة مع الكمية المطلوبة منها ( التوازن والرأس ) أو عندما يكون سعر الطلب مساويا لسعر العرض ( التوازن والرأس ) أي السعر الإبتدائي يساوي سعر التوازن $P(t) = P(0) = P^*$.

ويقال أن توازن السوق مستقر إذا وجدت قوى تدفع بالسـوق إلـى التوازن إذا ابتعد عنه.

ولكن في الواقـع السـعر الإبتـدائي لا يسـاوي سـعر التـوازن $P(O) \neq P^*$ وبتحقيق المساواة تحدث عملية تعديل مستمرة.

فإذا أتينا فرضية والرأس الخاص بقانون تغير السعر وهو أن معـدل تغير السعر مع الزمن دالة في فائض الطلب وإذا افترضنا للتبسيط أن معدل التغير في السعر يتناسب تناسبا طرديا مع فائض الطلب أي :

$$\frac{dp}{dt} = \alpha(Q_d - Q_S) = \alpha(a - bp - c - dp)$$ حيث $\alpha \rangle 0$

$$\frac{dp}{dt} = +\alpha(b+d)P = \alpha(a-c)$$ . وهو يمثل معامل التعديل

وهي معادلة تفاضلية غير متجانسة من الدرجة الأولى في السـعر P وبما أن السعر الإبتدائي هو P(0) فإنه لهذه المعادلة حل خاص ونهائي هو

$$P(t) = \left[P(0)\frac{a-c}{b+d}\right]e^{-\alpha(b+d)t} + \frac{a-c}{b+d}$$

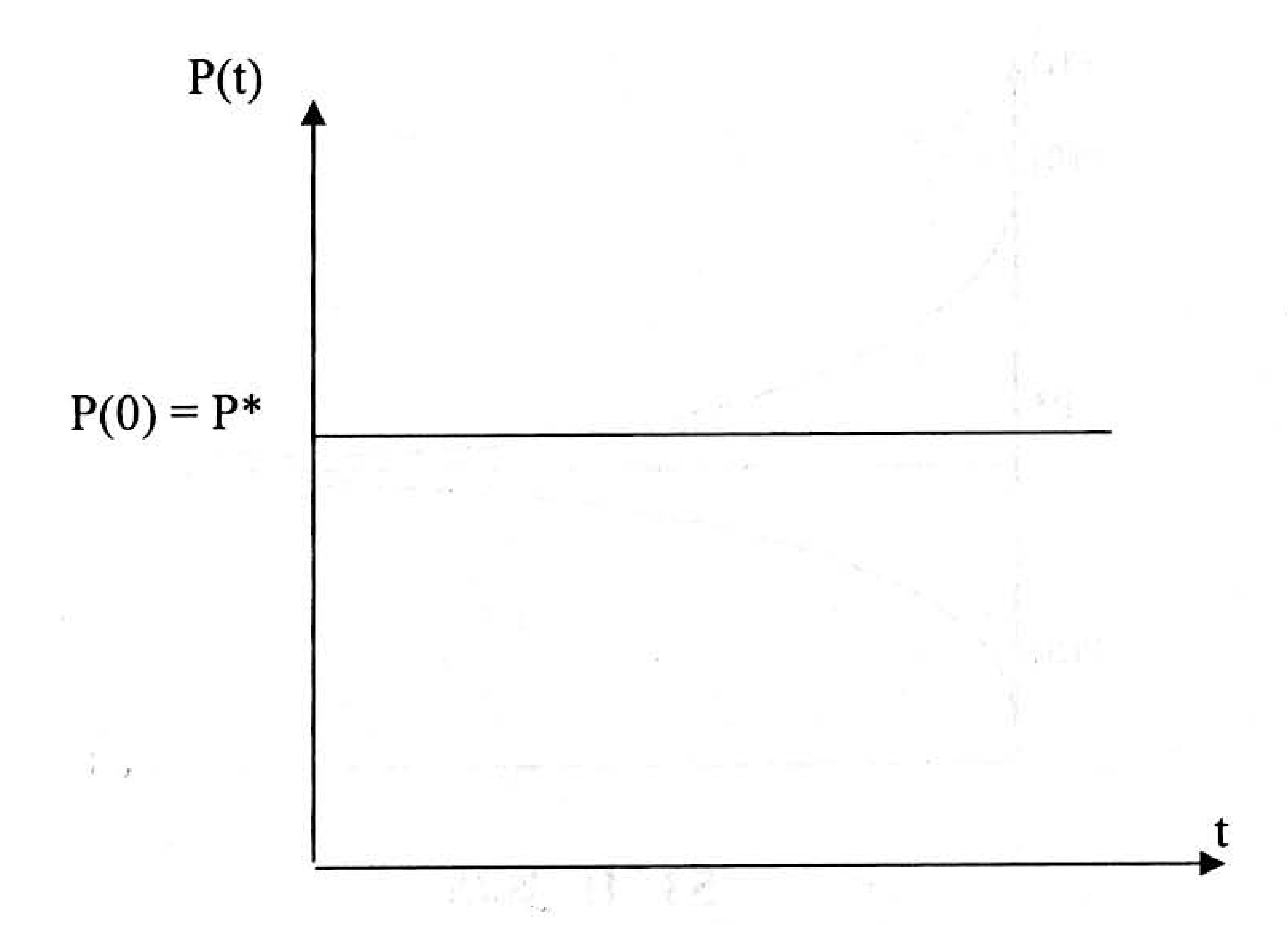
فإن $P^* = \dfrac{a-c}{b+d}$

$$P(t) = \left[P(0) - P^*\right]e^{-\alpha(b+d)t} + P^*$$

حيث: $\alpha(b+d)\rangle 0$

عندما: $P(0) = P^*$

إذا كانت نهاية ( P ( t عندما t تؤول إلى ما لا نهاية هي *P يكـون التوازن مستقرا وفي هذه الحالة يكون مسار الزمن عبارة عن خط أفقي كما هو موضح في الشكل II. 52




**الشكل II. 52**

ـ عندما $P(0)\rangle P*$

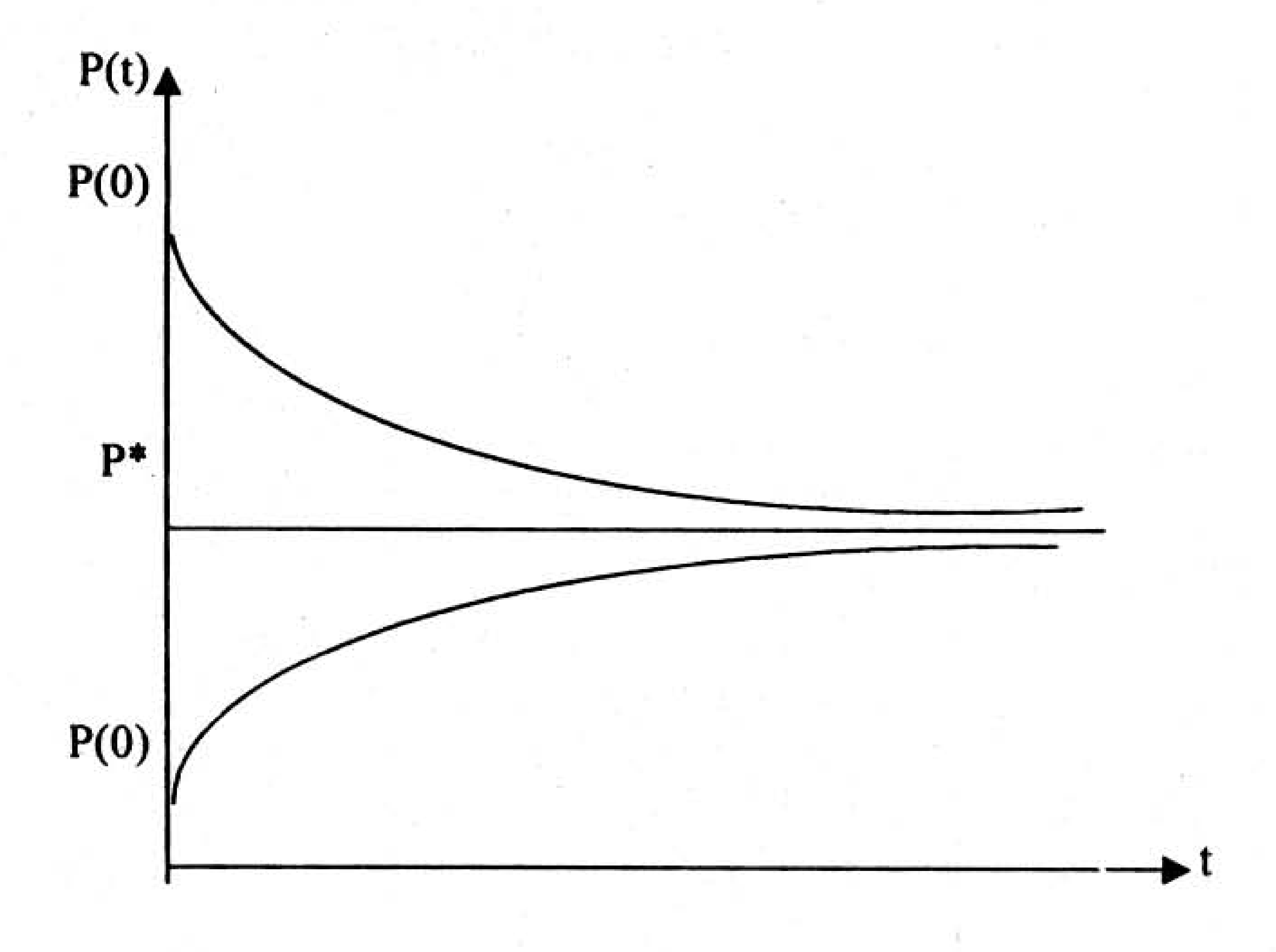
كلما زادت t كلما اقترب المقدار $e^{-\alpha(b+d)t}$ من الصفر واقترب مسار الزمن P (t) من مستوى التوازن *p أنظر الشكل رقم 11، 53.

ـ عندما $P(0)\langle P*$.

كلما زادت t كلما اقترب المقدار $e^{-\alpha(b+d)t}$ من الصفر واقترب مسار الزمن P (t) من مستوى التوازن *p أنظر الشكل رقم 11، 53.

وفي كلتا الحالتين فإن:

$$\lim_{t \to \alpha} P(t) = P*$$




**الشكل II. 53.**

ويمكن القول أنها إذا استجاب السعر الفائض الطلب بحيث يرتفع بمرور الزمن عندما يكون فائض الطلب موجبا $(Q_D \rangle Q_S)$ وينخفض عندما يكون فائض الطلب سالبا $(Q_D \langle Q_S)$ فإن توازن السوق يكون مستقرا إذا كان فائض الطلب سالبا عند الأسعار الأكبر من سعر التوازن وكان موجبا عند الأسعار الأقل من سعر التوازن.

# مراجع الباب الثاني

## أولا: المراجع باللغة العربية:

1 ــ د. عبد العزيز هيكل، أسئلة وأجوبة في الاقتصاد التحليلي، الاقتصاد الرياضي والقياسي معمبادئ الإحصاء والرياضة البحتة، بيروت. مكتبة مكاوي. 1975.

2 ــ محمد إبراهيم الغزلان، مبادئ الاقتصاد، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، 1975.

3 ــ إسماعيل محمد هاشم، مبادئ الاقتصاد التحليلي، بيروت، دار النهضة العربية 1978.

4 ــ د. هناء خير الدين، الاقتصاد الرياضي، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، الطبعة الأولى 1979.

5 ــ محمود يونس محمد، عبد النعيم محمد مبارك، أساسيات علم الاقتصاد، بيروت، الدار الجامعية، 1985.

6 ــ أحمد جامع، النظرية الاقتصادية، الجزء الأول، التحليل الاقتصادي الجزئي، القاهرة، دار النهضة العربية، الطبعة الخامسة، 1986.

7 ــ د. نعمت الله نجيب إبراهيم، أسس علم الاقتصاد، الاسكندرية، مؤسسة شباب الجامعة 1987.

8 ــ لورانس ركلاين، اقتصاديات العرض والطلب، القاهرة، مكتبة الأنجلو المصرية، 1988.

9 ــ ضياء مجيد الموسوي، النظرية الاقتصادية، التحليل الاقتصادي الجزئي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

## ثانيا: المراجع باللغة الفرنسية

1 – Amani ( Mokhtar), Microéconomie, théories critiques et exercices pratiques. Quebec caetan Morin 1981.

2 – Guerrien (Bernard), Micro économie et calcul économique. Paris, Economica 1982.

3 – Lesourne ( Jacques), Analyses microéconomiques, Paris, ESI 1985.

4 – Bernier (B), Microéconomie, Exercices et corrigés, Paris Dunod 1986.

9 – Picard (Pierre), éléments de microéconomie, Théorie et applications, Paris montchrestien 1987.



# الباب الثالث

# نظرية سلوك المستهلك

**تمهيد:**

إن الغاية النهائية من الإنتاج هي الإستهلاك وتتعرض نظرية سلوك المستهلك بالتحليل لسلوك المستهلك الفرد ( الوحدة الأساسية الإستهلاكية في المجتمع ) وهو بصدد اتخاذ قراره المتعلق بالنشاط الإستهلاكي حيث يهدف المستهلك الفرد إلى إنفاق دخله المحدود على السلع والخدمات الإستهلاكية المعروضة من طرف المنتجين وفق الأسعار السائدة في السوق مستهدفا تعظيم منافعه وتحقيق أكبر قدر ممكن من الإشباع.

هناك مدرستان تناولتا تقييم المنفعة وهما:

**أولا** : المدرسة الكلاسيكية: القياس الكمي للمنفعة واتبعته المدرسة الكلاسيكية، حيث يهدف هذا التعريف إلى كون المستهلك إذا واجه مجموعة سلعية يمكنه ترتيبها ترتيبا تنازليا حسب أهميتها له، وبحيث يكون الترتيب كميا بوحدة قياس المنفعة.

**ثانيا**: التعريف النيوكلاسيكي الحديث للمنفعة: لا يشترط قياس المنفعة كميا ولكن يجب على المستهلك أن يكون قادرا على ترتيب تفضيلاته تنازليا حسب أهميتها له فمثلا لو واجه مستهلك ما ثلاث سلع C. B. A

فإنه وفق هذا التعريف تظهر رشادة المستهلك ثلاثة احتمالات:

1 ــ أمام مجمل الخيارات الممكنة يستطيع المستهلك أن يقدر بالنسبة لكل خيارين على حدى أيهما الأفضل، هل A أفضل من B أم B أفضل من A أم لديه الخياران سواء.

2 ــ أن واحدة فقط من الحالات الثلاثة صحيحة.

3 ــ إذا كان المستهلك يفضل الخيار A على الخيار B ويفضل الخيار B على الخيار C فإنه حتما يفضل الخيار A على الخيار C وفق علاقة التعدى وعلى هذا الأساس ينقسم الباب الثاني إلى قسمين:

الفصل الأول: في المنفعة العددية أي وفق المدرسة الأولى.

الفصل الثاني: في المنفعة الترتيبية ( التحليل بمنحنيات السواء ) أي وفق المدرسة الثانية.

<u>**تحليل المنفعة:**</u> يستهدف النشاط الإقتصادي إشباع الحاجات الإنسانية، والحاجة بالمعنى الإقتصادي هي تعبير عن الرغبة، وكل ما يحتاجه الإنسان يعتبر نافعا ولكن ليس كل شيء نافع يكون بالضرورة ذا قيمة، لأن القيمة صفة ملازمة للندرة.

<u>**مثال**</u>: الهواء والماء سلع متوفرة بدرجة كافية لإشباع كل من يطلبها، فهي تتمتع بالمنفعة دون القيمة في حين الألماس له منفعة صغيرة بالنسبة لعامة الناس ومع ذلك لها قيمة كبيرة، لأنها نادرة وليس من السهل الحصول عليها، ويمكن أن تعرف منفعة سلعة ما بالنسبة لشخص معين بأنها تعبر عن شدة الرغبة التي يبديها هذا الشخص للحصول على السلعة في لحظة معينة وظروف معينة.

ويمكن أن نخلص إلى أن المنفعة ظاهرة إقتصادية تتميز بمايلي:

أ ) أنها ذات طابع ذاتي تلد بإستيقاض رغبة شخصية وتزول بزوالها ولهذا فهي لا تمثل صفة موضوعية ملازمة للسلعة.

ب ) تتوقف المنفعة الإقتصادية للسلعة من جهة على كمية هذه السلعة ومن جهة أخرى على شدة الرغبة.

ج ) ترتبط المنفعة الإقتصادية لسلعة بالطابع الإقتصادي لهذه السـلعة أو الخدمة. ذلك الطابع الذي يجعل من سلعة ما محلا للتبادل.

# الفصل الأول

# المنفعة الحدية

## المنفعة العددية:

وفق المدرسة الأولى حيث يكون أساس تقييم المنفعة هو التقييم الكمي نتناول نظرية المنفعة العددية.

### I ـ المنفعة الكلية والمنفعة الحدية:

إذا فرضنا مؤقتا بأنه يمكن قياس الإشباع الذي يحصل عليه شخص ما عندما يحس بحاجة ما نتيجة إستهلاكه وحدات متماثلة من سلعة معينة في شكل وحدات منفعة تقيس كل وحدة درجة تصويرية من درجات الإشباع.

1 ـ **المنفعة الكلية**: مجموعة ما يحصل عليه المستهلك من منفعة نتيجة إستهلاكه لكميات مختلفة من سلعة ما في وحدة زمنية معينة.

2 ـ **المنفعة الحدية**: هي التغير في المنفعة الكلية الناتج عن الزيادة في عدد الوحدات المستهلكة من سلعة ما بوحدة واحدة في وحدة زمنية معينة

**مثال:**

لدينا جدول المنفعة الكلية الناتجة عن استهلاك كميات مختلفة من سلعة ما.

| Q | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| UT | 0 | 10 | 18 | 24 | 28 | 30 | 30 | 28 |

**المطلوب:** 1) أحسب المنفعة الحدية لمختلف المستويات من الإستهلاك.

2) مثل بيانيا كلا من المنفعة الكلية والمنفعة الحدية.

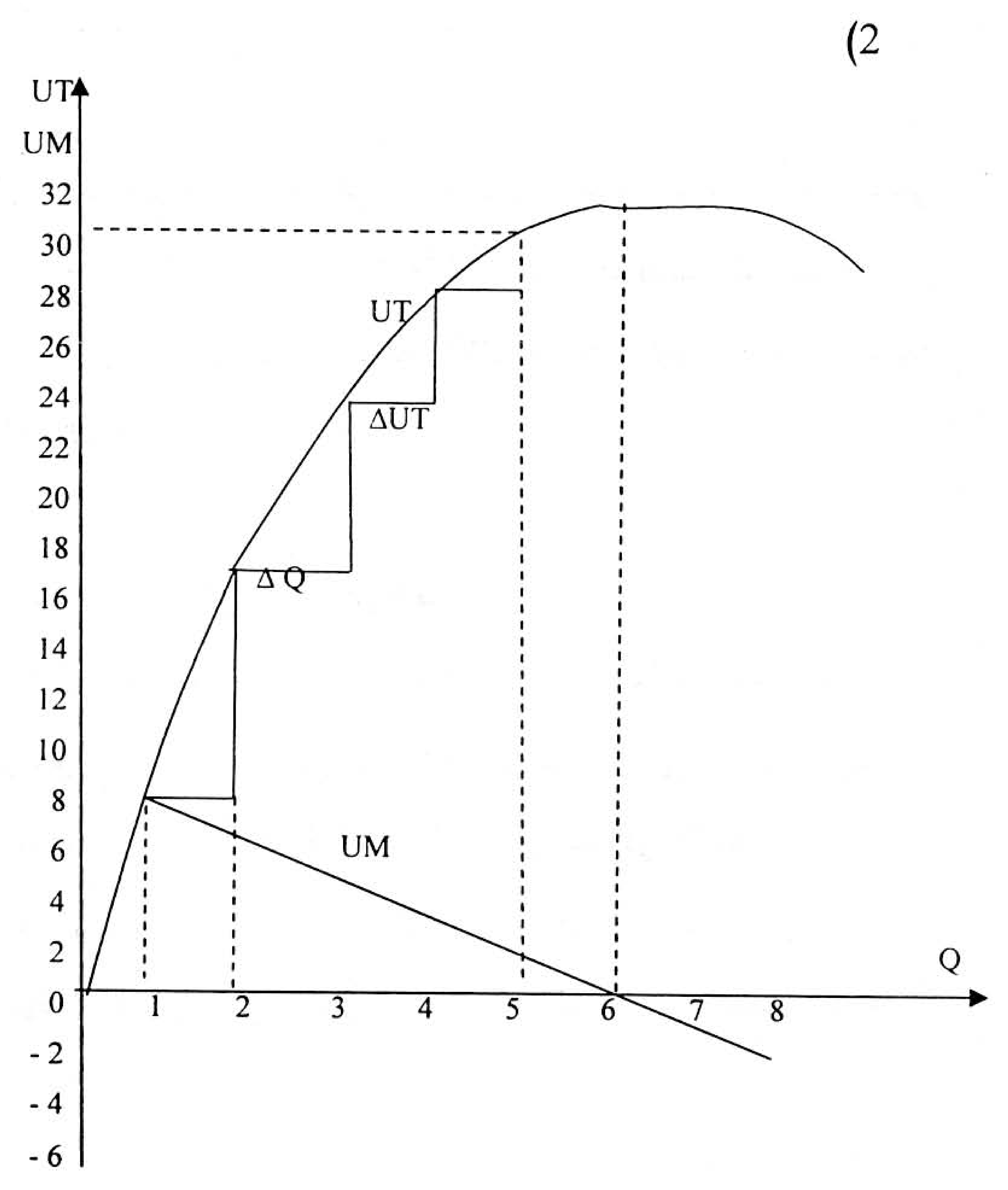
3) فسر سلوك المنفعة الكلية والمنفعة الحدية.

**الحل:**

(1

| الكمية Q | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المنفعة الكلية UT | 0 | 10 | 18 | 24 | 28 | 30 | 30 | 28 |
| المنفعة الحدية UM | - | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 0 | 2 - |

(2




**الشكل II. 1**

3) في البداية تتزايد المنفعة الكلية كما تتزايد المنفعة الحدية ثم تتزايد المنفعة الكلية بتزايد متناقصا في حين تتناقص المنفعة الحدية وعندما تصل المنفعة الكلية إلى النقطة القصوى تصبح المنفعة الحدية تساوى صفر وهذا عند حد الإشباع.

إن الإستمرار في الإستهلاك بعد هذا الحد يؤدي إلى تناقص المنفعة الكلية ذلك لأن المنفعة الحدية تصبح سالبة.

– إن زيادة المنفعة الحدية في البداية كان بسبب زيادة الرغبة في الإستهلاك الناتج عن إستهلاك الوحدة الأولى وبعدها تبدأ الرغبة في الإستهلاك تتناقص إلى أن تنعدم عند حد الإشباع تأكيدا لمبدأ تناقص المنفعة الحدية ( أنظر الشكل رقم III ، 1 ).

**2. 1 – <u>قانون تناقص المنفعة الحدية</u>:**

يعتبر قانون تناقص المنفعة الحدية ذا أهمية خاصة في تفسير سلوك المستهلك، وفحوى هذا القانون هو أنه إذا استمر فرد ما في إستهلاك وحدات متماثلة من سلعة ما، فإن المنفعة الحدية لابد وأن تبدأ في التناقص بعد حد معين حتى تصل إلى الصفر عند حد الإشباع، والملاحظ هنا أنه تعتمد فكرة تحقيق المستهلك لأقصى قدر ممكن من المنفعة على قانون تناقص المنفعة الحدية.

## 2 .2 ـ تعريف المنفعة الحدية من الوجهة الرياضية:

ليكن التابع ( $UT = F(Q_X)$ ) هو تابع المنفعة الكلية الناتج من استهلاك كميات مختلفة من السلعة X وهو تابع نفرضه مستمرا وقابل للإشتقاق.

نسمى $\Delta Q_X$ الزيادة في الإستهلاك من السلعة X، ونسمي $\Delta UT$ التغير الحاصل في المنفعة الكلية الناتج عن الزيادة في إستهلاك السلعة X.

**المنفعة الحدية**: هي نهاية نسبة التغير في المنفعة الكلية والإستهلاك عندما يؤول في الإستهلاك إلى الصفر، ونرمز للمنفعة الحدية بالرمز $\acute{U} = UM$

$$\overline{U} = UM = \text{Lim}_{QX \to 0} \frac{\Delta U_t}{\Delta Q_X} = \frac{dU_t}{dQ_X}$$ ( مشتق المنفعة الكلية )

تكون المنفعة الحدية قبل حد الإشباع أكبر من الصفر $\acute{U} > 0$ في حين مشتق المنفعة الحدية قبل حد الإشباع أصغر من الصفر $\overline{\overline{U}} < 0$ أي

$$\overline{\overline{U}} = \frac{d^2UT}{dQ^2} \langle 0$$

لأن الزيادة في المنفعة الكلية في تناقص وهذا ما وضحناه في المثال السابق.

**فرضية جديدة:**

نفرض أن المستهلك يتزود بمجموعة من السلع ونقتصر في بحثنا هذا على تشكيلة من سلعتين X،Y ثم نعمم التشكيلة من n سلعة، لـيكن تـابع لمنفعة الكلية تابعا مستمر وقابل للإشتقاق وهو ( UT = F ( Qx ، Qy

ـ تتغير المنفعة الكلية UT تغيرا طرديا مع الكميـة المسـتهلكة مـن السلعة X أو السلعة Y فهي تزيد بزيادة الكمية المستهلكة من إحـداهما مـع ثبات الكمية المستهلكة من السلعة الأخرى أو من استهلاكهما معا.

ـ أما المنفعة الحدية للسلعة X فهي عبارة عن المشتق الجزئـي الأول لتابع المنفعة الكلية بالنسبة لكمية السلعة X وهي أكبر من الصفر.

$$UM_X = -\frac{\partial UT}{\partial Q_X} \rangle 0$$

ـ وأما المنفعة الحدية للسلعة Y فهي عبارة عن المشتق الجزئي الأول لتابع المنفعة الكلية بالنسبة لكمية السلعة Y وهي أكبر من الصفر.

$$UM_Y = -\frac{\partial UT}{\partial Q_Y} \rangle 0$$

ـ تناسب المنفعة الحدية تناسبا عكسيا مـع الكميـة المسـتهلكة مـن السلعتين أي أن المشتق الجزئي الثاني لدالة المنفعة الكلية يكون سالبا.

$$\overline{\overline{U}}_X = -\frac{\partial(\partial UT)}{\partial Q_X(\partial Q_X)} = \frac{\partial^2 UT}{\partial Q_X^2} \langle 0$$

$$\overline{\overline{U}}_Y = -\frac{\partial(\partial UT)}{\partial Q_Y(\partial Q_Y)} = \frac{\partial^2 UT}{\partial Q_Y^2} \langle 0$$

## II ـ فكرة تعظيم المستهلك لمنفعته الكلية:

لقد قلنا سابقا في حالة سلعة واحدة تعتمد فكرة تعظيم المنفعة الكلية على قانون تناقص المنفعة الحدية، فهل هذا صحيح بالنسبة لسلعتين أو أكثر؟ ليس العنصر الوحيد الذي تعتمد عليه فكرة تعظيم المنفعة الكلية في حالة أكثر من سلعة وسنبين ذلك.

مثال: نفرض مستهلك ما يستهلك سلعتين فقط هما X ، Y بسعرين 50 دينار، 10 دنانير على الترتيب، وأمام المستهلك إختيارات معينة أما دخله فهو 500 دج.

| عدد الوحدات $Q_X$ | سعر الوحدة $P_X$ | حجم الإنفاق على السلعة X | عدد الوحدات $Q_Y$ | سعر الوحدة $P_Y$ | حجم الإنفاق على السلعة Y | مجموع الإنفاق | الدخل - مجموع الإنفاق |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 50 | 250 | 25 | 10 | 250 | 500 | 0 |
| 10 | 50 | 500 | 0 | 10 | 0 | 500 | 0 |
| 0 | 50 | 0 | 50 | 10 | 500 | 500 | 0 |
| 5 | 50 | 250 | 10 | 10 | 100 | 350 | 150 |
| 10 | 50 | 500 | 3 | 10 | 30 | 530 | 30 - |
| 10 | 50 | 500 | 25 | 10 | 250 | 750 | 250 - |

**<u>الفرضيات</u>:** نفرض ما يلي من أجل التجريد العلمي.

- تحليل ساكن.
- سلعتان.
- ثبات الأسعار.
- ثبات الدخل.
- السلعتان غير متنافستين.
- السلعتان غير متكاملتين.
- لا يوجد إدخار.

**أولا:** نفرض أن قانون تناقص المنفعة الحدية سارى المفعول بالنسبة لسلعتين ونعتمد عليه في تعظيم المنفعة الكلية ونحلله من ناحية الكميات المستهلكة

أ ) يختار المستهلك الثنائية السلعية ( 5,25 ) = $(Q_x, Q_y)$

ب) يختار المستهلك الثنائية السلعية ( 10,0 ) = $(Q_x, Q_y)$

فهل تزيد المنفعة الكلية أم تنقص ؟

إنه بالنسبة لقانون تناقص المنفعة الحدية زادت المنفعة الكلية للسلعة X ونقصت المنفعة الكلية للسلعة Y لكن لا نستطيع أن نبين هل المنفعة الكلية للسلعتين معا زادت أم نقصت.

ج) نفرض أن المستهلك اختار الثنائية السلعتين ( 10,25 ) = $(Q_x, Q_y)$ فهل تزيد المنفعة الكلية أم تنقص ؟

إنه بالنسبة لقانون تناقص المنفعة الحدية زادت المنفعة الكلية للسلعة X وكذلك المنفعة الكلية للسلعة Y ومنه نقول زادت المنفعة الكلية للسلعتين معا تحت ظروف عدم التأكد لأننا قلنا سابقا أن المنفعة الكلية لسلعة ما تصل نهايتها العظمى ثم تتناقص.

د) نستنتج أن هذا القانون لا يحكم تعظيم المنفعة الكلية للسلعتين معا لوحده.

ثانيا: نعالج القضية من ناحية الإنفاق:

إذا دققنا النظر في الجدول السابق نجد أن المستهلك يقع في إحدى الحالات الثلاث التالية.

أ ) الإنفاق اصغر من الدخل أي يوجد فائض ونرفض هذه الحالة لأنه لا يوجد إدخار.

ب) الإنفاق أكبر من الدخل أي يوجد عجز وبالتالي نرفض هذه الحالة لأن المستهلك لا يستطيع شراء هذه الكميات بسبب القيد الهيكلي المتمثل في الدخل.

ج) الإنفاق يساوى الدخل وهي الحالة المثلى.

نتيجة: فكرة تعظيم المستهلك لمنفعته الكلية هي محاولة التوصل إلى التشكيلة السلعية التي تحقق له في ظل دخله ( قيد الميزانية) منفعة كلية صافية ممكنة.

### III ـ قيد الميزانية ( قيد الإنفاق ):

نفرض أن المستهلك ينفق دخله المحدود R على اقتناء سلعتين X، Y حيث سعر الوحدة من كل من السلعتين X ، Y هو $P_x, P_y$ على الترتيب.

نمثل قيد الميزانية على الصورة التالية.

$$R = Q_x P_x + Q_y P_y$$

من هذه المعادلة يمكننا تحديد الكمية المستهلكة من إحدى السلعتين.

$$Q_X = \frac{R - Q_Y P_Y}{P_X} \text{ و } Q_Y = \frac{R - Q_X P_X}{P_Y}$$

من هاتين المعادلتين الأخيرتين يظهر أن التغير في الكمية المستهلكة من إحدى السلعتين يؤدي إلى تغير الكمية المستهلكة من السلعة الأخرى.

**مثال:**

إذا كان $R = 100$، $P_x = 4$، $P_y = 5$، $Q_x = 10$، $Q_y = 12$

فإن $R = Q_x, P_x + Q_y P_y = 10 \times 4 + 12 \times 5 = 100$

نفرض أن المستهلك رفع من استهلاكه للسلعة Y حيث استهلك 16 وحدة منها أحسب كمية X المستهلكة.

$$Q_X = \frac{R - Q_Y P_Y}{P_X} = \frac{100 - 16{,}5}{4} = 5$$

نلاحظ أنه في ظل قيد الميزانية أي تغير في الكمية المستهلكة من إحدى السلعتين يؤدي إلى تغير عكسي في الكمية المستهلكة من السلعة الأخرى أي يوجد تناسب عكسي بين الكميتين المستهلكتين من السلعتين.

البرهان التحليلي:

إن الزيادة في الكمية المستهلكة من إحدى السلعتين تؤدي إلى زيادة حجم الإنفاق الإستهلاكي على هذه السلعة وينقص حجم الإنفاق الإستهلاكي على السلعة الأخرى، ومع ثبات الأسعار في المدة القصيرة تزيد الكمية المستهلكة من سلعة وتقل من الأخرى.

البرهان الرياضي:

$$Q_Y = \frac{R - Q_X P_X}{P_Y}$$

$$\frac{dQ_Y}{dQ_X} = \frac{-P_X P_Y}{(P_Y)2} = -\frac{P_X}{P_Y}$$

$$\frac{dQ_Y}{dQ_X} = -\frac{P_X}{P_Y}$$

نرجع إلى مثالنا السابق: نرفع من الإستهلاك للسلعة Y إلى 16 وحدة أي $dQ_y = \boldsymbol{4}$

$$dQ_Y = 4$$

$$\frac{dQ_Y}{dQ_X} = -\frac{P_X}{P_Y}$$

$$\frac{+4}{dQ_X} = -\frac{4}{5} \Rightarrow dQ_X = -5$$

إذن عند زيادة الكمية المستهلكة من Y بـ 4 وحدات ننقص الكمية المستهلكة من X بـ 5 وحدات ومنه تصبح الكميات المستهلكة ضمن قيد الميزانية هي $Q_x = 5\ ,\ \ Q_y = 16$

$$R = Q_X.P_x + Q_y.P_y = 5 \times 4 + 16 \times 5 = 100$$

## IV ـ الشروط التي يكون ضمنها المستهلك في حالة توازن:

إن الزيادة في المنفعة الكلية المترتبة عن الزيادة في الكمية المستهلكة من السلعة X يترتب عليها نقصان في المنفعة الكلية نتيجة نقصان في الحجم المستهلك من السلعة Y وبالتالي التغير الكلي في المنفعة الكلية dUT يساوي إلى المجموع الجبري للتغير في المنفعة الكلية بالزيادة إلى التغير في المنفعة الكلية بالنقصان.

$$dUT = \frac{\partial UT}{\partial Q_X}.\ dQ_Y + \frac{\partial UT}{\partial Q_Y}.dQ_Y$$

$$dUT = UM_X.dQ_X + UM_Y.dQ_Y$$

حيث يمثل:

dUT التغير الكلي في المنفعة الكلية.

$UM_x$ المنفعة الحدية للسلعة X

$UM_y$ المنفعة الحدية للسلعة Y

$dQ_x$ مقدار التغير في عدد الوحدات المستهلكة من السلعة X

$dQ_y$ مقدار التغير في عدد الوحدات المستهلكة من السلعة Y

بقسمة طرفي المعادلة على $dQ_x$

$$\frac{dUT}{dQ_X} = UM_X\ \frac{dQ_X}{dQ_X} + UM_Y\ \frac{dQ_Y}{dQ_X}$$

$$\frac{dUT}{dQ_X} = UM_X + UM_Y\ \frac{dQ_Y}{dQ_X}$$

من أجل تعظيم المنفعة الكلية يجب أن يكون

$$\frac{dUT}{dQ_X} = UM_X + UM_Y\ \frac{dQ_Y}{dQ_X} = 0$$

لدينا شرط معدل التغير

$$\frac{dQY}{dQ_X} = -\frac{P_X}{P_Y}$$

بالتعويض عنه في المعادلة السابقة نحصل على:

$$UM_X + UM_Y(-\frac{P_X}{P_Y}) = 0 \Leftrightarrow \frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y}$$

إذن الشرط اللازم لتوازن المستهلك هو

$$\frac{\text{X المنفعة الحدية للسلعة}}{\text{X سعر السلعة}} = \frac{\text{Y المنفعة الحدية للسلعة}}{\text{Y سعر السلعة}}$$

**مثال:**

استهلاك مستهلك لسلعتين X، Y يوضحه الجدول التالي:

فإذا علمت أن R = 12 دينار وأن Px = 2، $P_y = 1$

حدد الكميتين من السلعتين X، Y اللتين يكون عندهما المستهلك في حالة توازن.

| Q | $UM_x$ | $UM_y$ |
|---|---|---|
| 1 | 16 | 11 |
| 2 | 14 | 10 |
| 3 | 12 | 09 |
| 4 | 10 | 8 |
| 5 | 8 | 7 |
| 6 | 6 | 6 |
| 7 | 4 | 5 |
| 8 | 2 | 4 |

لتحديد الكميات المستهلكة من السلعتين التي تجعل المستهلك في حالة توازن نستخدم شرطي التوازن.

1ـ شرط الإنفاق:

حجم الإنفاق يساوي الدخل $R = Q_x P_x + Q_y P_y$

2 ـ شرط المنافع الحدية

$$\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y}$$

**تعميم:**

إذا كان المستهلك يستهلك أكثر من سلعتين كأن تكـــون X1، X2، X3، X4 ...... Xn فإن شرطا التوازن هما:

1 ـ شرط الإنفاق

$$R = Q_{x1} . P_{x1} + ......Q_{x1} P_{x1} + .....Q_{xn} P_{xn}$$

2 ـ شرط المنافع الحدية

$$\frac{UM_{X1}}{P_{X1}} = ........ = \frac{UM_{xi}}{P_{xi}} = ........ = \frac{UM_{xn}}{P_{xn}}$$

في مثالنا السابق

| Q | $UM_x$ | $UM_y$ | $UM_x / P_x$ | $UM_y / P_y$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 11 | 8 | 11 |
| 2 | 14 | 10 | 7 | 10 |
| 3 | 12 | 9 | 6 | 9 |
| 4 | 10 | 8 | 5 | 8 |
| 5 | 8 | 7 | 4 | 7 |
| 6 | 6 | 6 | 3 | 6 |
| 7 | 4 | 5 | 2 | 5 |
| 8 | 2 | 4 | 1 | 4 |

من أجل التبسيط نقوم بحساب شرط المنافع أولا ثم ننتقل إلى شرط الإنفاق وبالتالي نحصل على اقتصار ( عملية حصر للثنائيات الممكنة ).

ففي مثالنا السابق حصلنا على 5 ثنائيات سلعية ممكنة بتطبيقنا لشـــرط المنافع وهي على أساس $(Q_x , Q_y)$ كالتالي.

( 1 ، 3 ) ،( 2 ، 5 ) ،( 3 ، 6 ) ،( 4 ، 7 ) ،( 5 ، 8 )

عندما $(Q_x , Q_y) = ( 1 ، 3 )$ فإن $\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y} = 8$

و $R = 12 \neq 1.2 + 3.1$

يوجد فائض عندما

$\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y} = 7$ فإن $(Q_x, Q_y) = (2 \text{ ، } 5)$

يوجد فائض كذلك $R = 12 \neq 2.2 + 5.1$

عندما $(Q_x, Q_y) = (3 \text{ ، } 6)$ فإن $\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y} = 6$

لا يوجد فائض ولا عجز $R = 12 = 3.2 + 6.1$

عندما $(Q_x, Q_y) = (4 \text{ ، } 7)$ فإن $\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y} = 5$

يوجد عجز $R = 12 \neq 4.2 + 7.1$

عندما $(Q_x, Q_y) = (5 \text{ ، } 8)$ فإن $\frac{UM_X}{P_X} = \frac{UM_Y}{P_Y} = 4$

يوجد عجز كذلك $R = 12 \neq 5.2 + 8.1$

إن التشكيلة السلعية التي تحقق توازن المستهلك

هي $(Q_x, Q_y) = (3 \text{ ، } 6)$ وهي الوحيدة ضمن قيد الإنفاق وقيد المنافع.



# الفصل الثاني
# المنفعة الترتيبية

## المنفعة الترتيبية

وفق المعيار الثاني الذي لا يشترط قياس المنفعة قياسا كميا وإنما يجب على المستهلك أن يكون قادرا على ترتيب تفضيلاته ترتيبا تنازليا حسب أهميتها له، ولكن تصنيف المستهلك للسلع وفق ترتيب الأفضلية لا يحول دون تمثيل هذا التصنيف بتابع رياضي للمنفعة يعكس بدلالة الكميات المختلفة من السلع المستهلكة أرقاما لا تعبر عن مقدار المنفعة المكتسبة ولكنها تشير فقط إلى ترتيبها في سلم تفضيلات المستهلك كذلك ندخل في البحث الجديد نظرية التفضيل عند حد السواء.

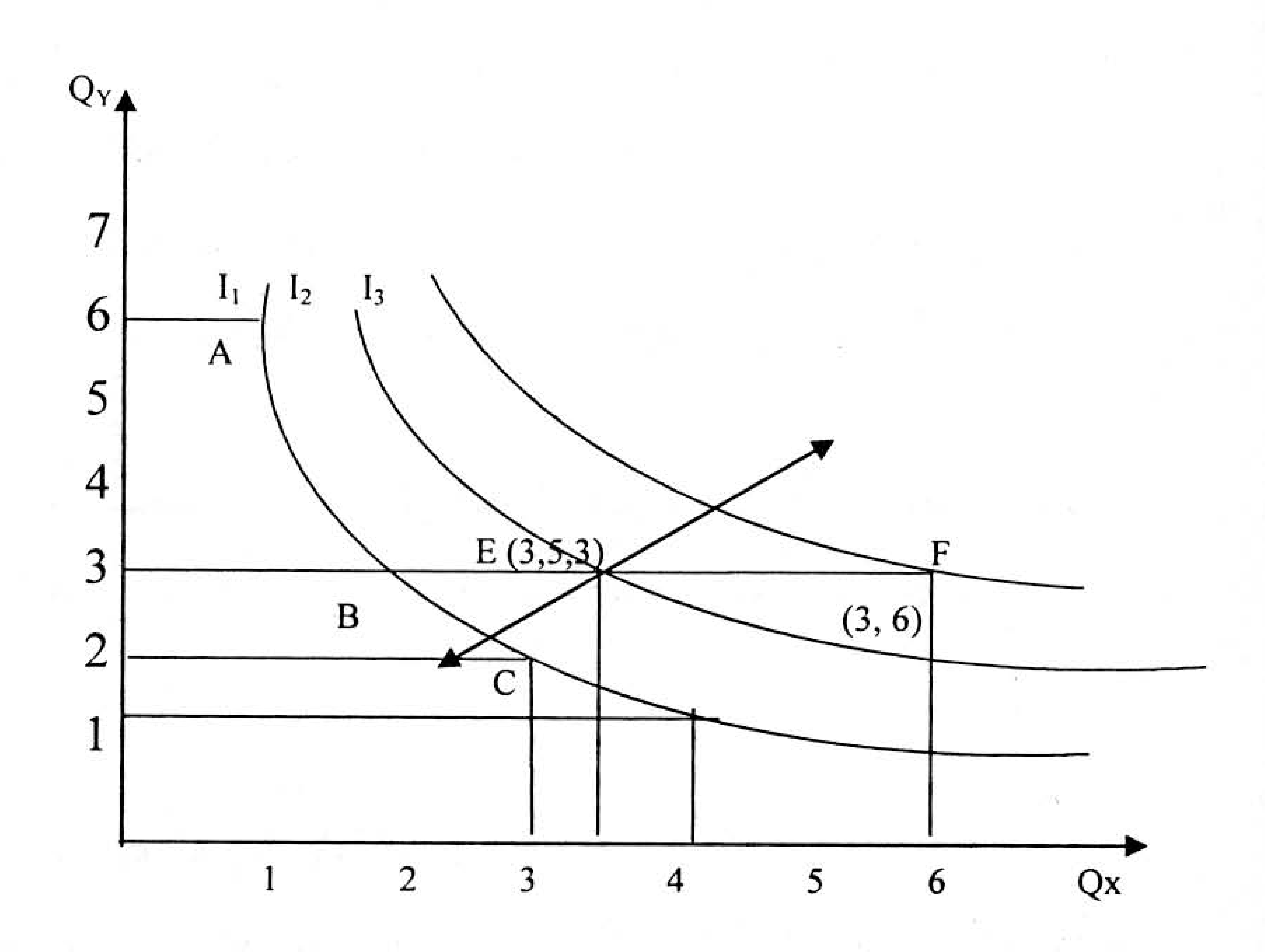
نفرض وجود سلعتين X، Y في السوق تحت الفروض السابقة التي فرضناها عندما تناولنا المنفعة العددية، وأن مستهلك ما يرغب في الحصول على كمية من كل منهما وسيواجه مجموعة من الإختيارات في شكل ثنائيات سلعية تعطي نفس المنفعة الكلية موضوعة في جدول المنفعة المتساوية (جدول السواء ).

| الثنائية | $Q_x$ | $Q_y$ |
|---|---|---|
| A | 1 | 6 |
| B | 2 | 3 |
| C | 3 | 2 |
| D | 4 | 1.5 |

<u>الرسم</u>: تمثل الكميات من السلعة X على المحور الأفقي وتمثل الكميات من السلعة Y على المحور الرأسي ثم تمثل الثنائيات D, C, B, A.

إن المستهلك سيحصل على نفس المنفعة الكلية عند إختيارية لأي ثنائية سلعية، وجميع هذه الثنائيات ( التوليفات ) التي تعطي نفس المنفعة الكليـــة تشكل منحنى هندسي يسمى بمنحنى السواء، ففي مثالنا السابق نرمـــز لهـــذا المنحنى بالرمز I 1 ( أنظر الشكل رقم III، 2 ).

**I ــ <u>تعريف منحنى الســـواء</u>:** هو المحل الهندسي للثنائيات (التوليفات) المختلفة من السلعتين X ، Y التي تعطى للمستهلك نفس المنفعة الكلية.




**الشكل III. 2. خريطة منحنيات السواء**

نفرض الآن أمام المستهلك ثنائيتين سلعتين E وهـــي ( 5,3 ، 3 ) = $(Q_x, Q_y)$

و F وهي ( 3 ، 6 ) = $(Q_x, Q_y)$، ونسمي المنحنى الذي تنتمي له E بالمنحنى I2 ونسمي المنحنى الذي ينتمي له F بالمنحنى I3.

نلاحظ أن اختيار المستهلك للتوليفة E يجعله ينتقل من المنحنى $I_1$ إلى المنحنى I 2 وفي هذه الحالة سيحصل المستهلك على منفعة كلية أكبـــر ممـــا يحصل عليه لو اختار أي من التوليفات A أو B أو C أو D وعنـــد اختيـــار المستهلك للتوليفة F فإنه ينتقل إلى المنحنى I 3 وبالتالي سيحصل على منفعة كلية أكبر مما يحصل عليه لو اختار التوليفة E وبعلاقـــة التعـــدي سيفضـــل المستهلك التوليفة F على باقي التوليفات لأن التوليفة F تعطي منفعة كلية أكبر مما تعطيه التوليفة E ومما تعطيه أي من التوليفات D, C, B, A .

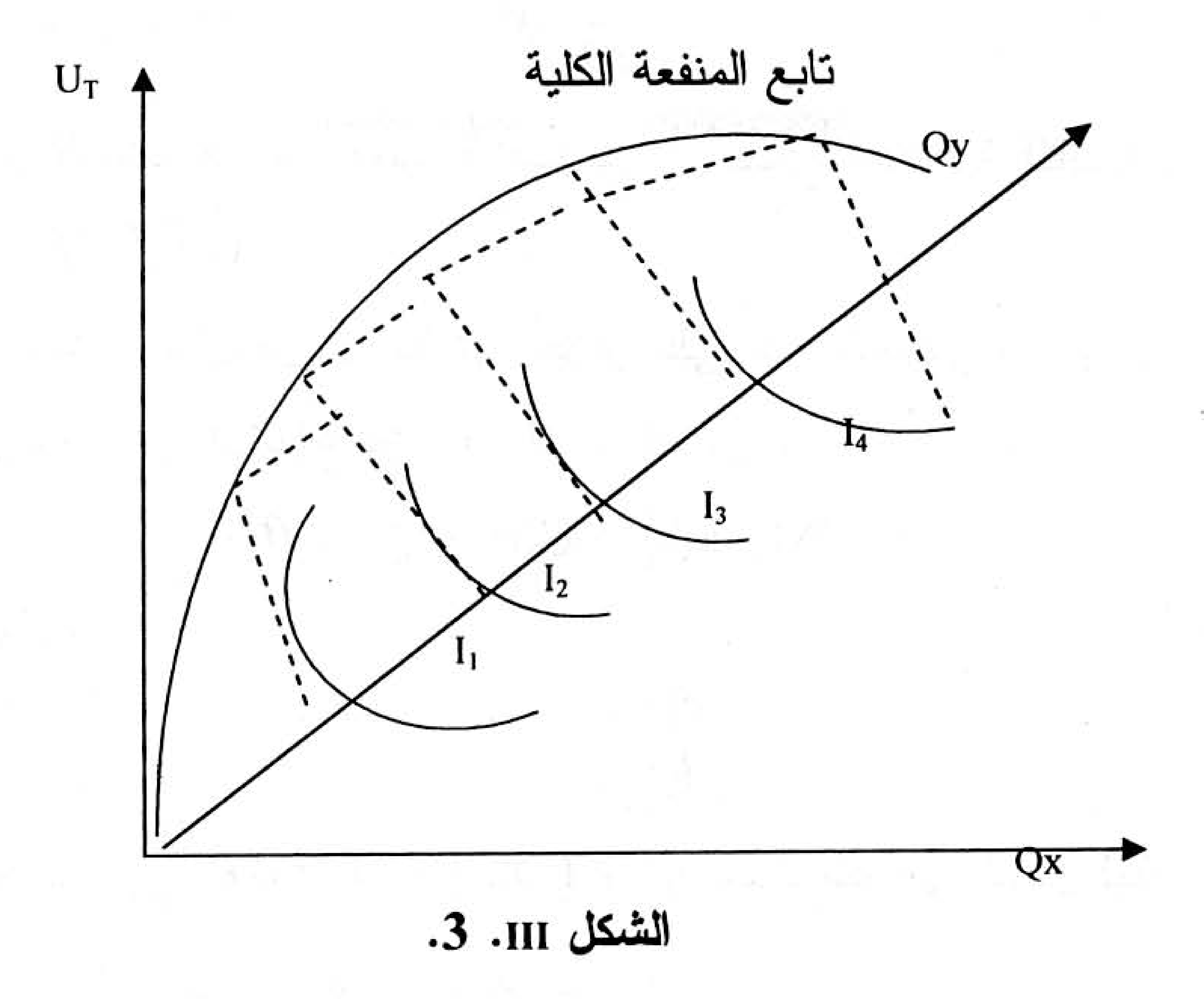
إذن نستنتج كلما إنتقلنا من منحنى سواء إلى منحنى سواء آخر مبتعدين على نقطة الأصل ( مركز الإحداثيات ) سنحصل على منفعة كلية أكبر مـــن سابقتها.

أما إذا انتقلنا من توليفة إلى أخرى على منحنى السواء نفســـه تبقـــي المنفعة الكلية ثابتة أي dUT = 0 وتشكل مجموعة منحنيات السواء خريطـــة السواء.

**<u>II – رسم تابع المنفعة الكلية:</u>**

في الشكل السابق يحدد المحوران $Q_y, Q_x$ السطح الذي نعكس نقاطه المختلفة واللامتناهية التوليفات المختلفة للسلعتين Y , X.

وإذا أردنا رسم تابع المنفعة الكلية نعيد رسم المخطط البياني في الفراغ حيث يمثل العمود U سلم المنفعة ( أنظر الشكل رقم III ، 3 ).




**الشكل III. 3.**

III ـــ خصائص منحنيات السواء: إذا رمزنا إلى ثابت المنفعة الكلية الترتيبي بالدالة

$$U = f(Q_x, Q_y)$$

وعرفنا منحنى السواء بأنه المنحنى الذي تمثل نقاطه الثنائيات السلعية المختلفة للكميات من السلعتين التي تحقق مستوى إشباع واحد وثابت من المنفعة.

نستخلص أن منحنيات السواء تتميز بالخصائص التالية:

**1 ــ <u>الخاصة الأولى: منحنى السواء تابع متناقص:</u>**

ونقصد بذلك أن التابع $Q_y = f(Q_x)$ يقبل مشتق من الدرجة الأولى سالب

$$\frac{dQ_Y}{dQ_X} \langle 0$$

ولإثبات هذه الخاصة نفرض أن تابع المنفعة الكلية هو

$$U = f(Q_x, Q_y)$$

وعند الإنتقال من توليفة إلى أخرى على نفس المنحنى الذي يمثل مستوى معين من الإشباع فإن $dU = 0$ أي

$$dU = UM_x dQ_x + UM_y dQ_y = 0$$

ومنه

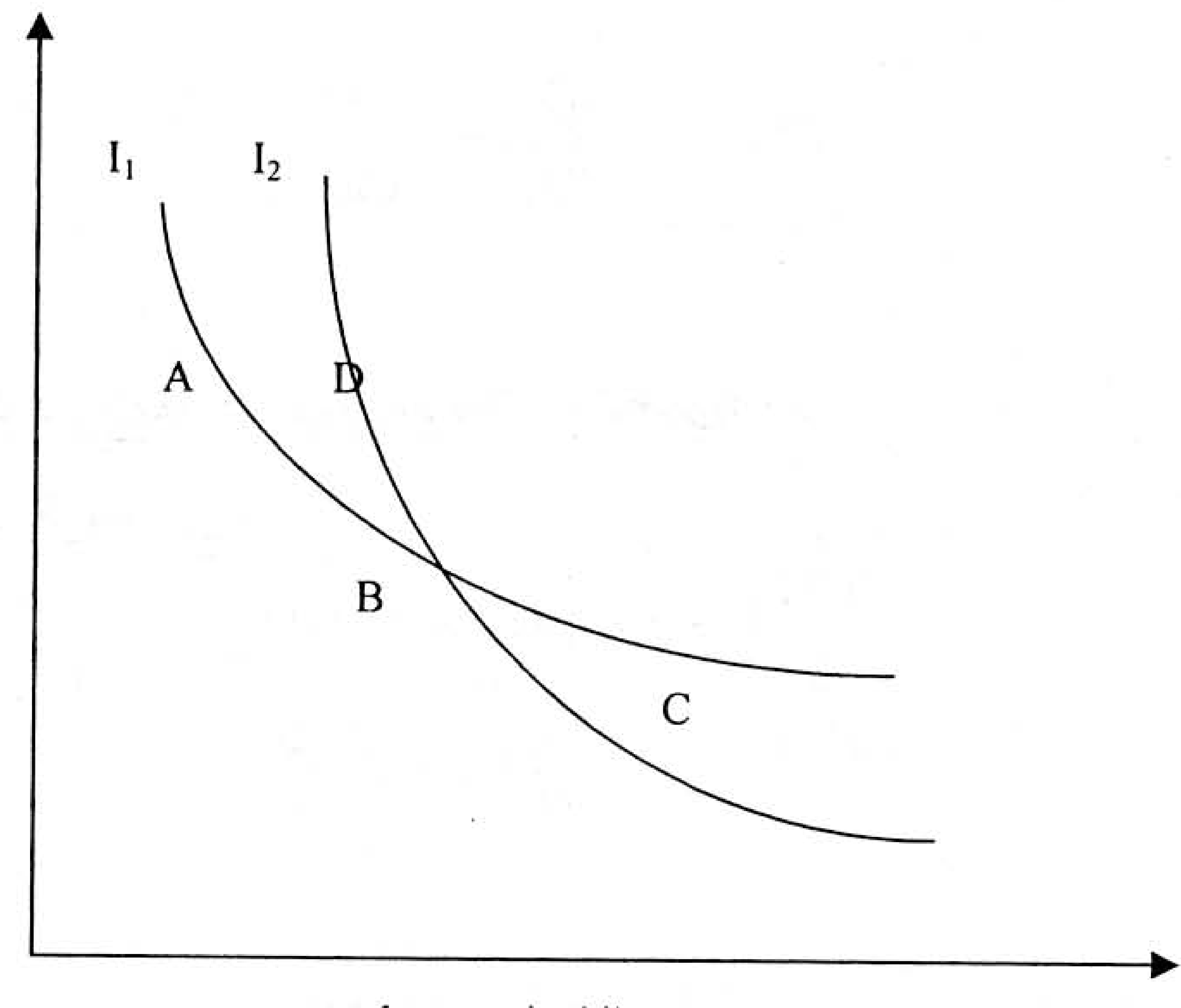
$$\frac{dQ_Y}{dQ_X} = -\frac{UM_Y}{UM_X}$$

يمثل $\frac{dQ_Y}{dQ_X}$ مشتق التابع ( $Qy = F(QX)$ ) حيث المنحنى الممثل لهذا التابع هو منحنى السواء الذي يتحرك عليه المستهلك.

وبما أن مشتق التابع ( $Qy = F(QX)$ ) في نقطة من المنحنى تساوي إلى ميل المستقيم المماس للمنحنى في هذه النقطة نقول أن $\frac{dQ_Y}{dQ_X}$ هي ميل منحنى السواء وهو سالب وبالتالي فإن منحنى السواء متناقص.

2 ـ <u>الخاصة الثانية: منحنيات السواء لا يمكنها أن تتقاطع:</u>

لإثبات هذه الخاصة نرسم الشكل التالي مفترضين تقاطع منحنيات السواء ثم نثبت العكس ( أنظر الشكل رقم III ، 4 )




**الشكل III. 4**

إذا كانت الثنائيات السلعية C, B, A على نفس منحنى السواء $I_1$ فإنهـا تعطي نفس مستوى الإشباع وإذا كانت الثنائيات D, B علـى نفـس منحنـى السواء $I_2$ فإنها تعطي نفس مستوى الإشباع وبالتالي عن طريـق العلاقـة المتعدية تعطي الثنائية السلعية D, C, B, A نفس الإشباع وعليـه لا يمكـن أن تكون هذه الثنائيات على منحنيين مختلفين وإنما تكون على منحنـى سـواء واحد وبالتالي نستنتج عدم تقاطع منحنيات السواء.

3 ـ الخاصة الثالثة: منحنى السواء مقعر إلى أعلى:

للبرهان على هذه الخاصة نقوم بما يلي:

أولا: تعريف المعدل الحدي للإحلال: $TMS_{xy}$

هو معدل يتم بموجبه استبدال كمية معينة من السلعة X بكمية معينـة من السلعة Y بشرط أن تبقى المنفعة الكلية ثابتة $dUT = 0$

$$MRS_{XY} = -\frac{dQ_Y}{dQ_X} = -\frac{UM_X}{UM_Y} = \frac{P_X}{P_Y}$$

ثانيا: إثبات المعدل الحدي الإحلال متناقص:

للتبسيط نفرض أن:

$$\frac{\partial UM_X}{\partial Q_X} = f_{11}, UM_Y = f_2, UM_X = f_1$$

$$\frac{\partial UM_Y}{\partial Q_X} = f_{21}, \frac{\partial UM_X}{\partial Q_Y} = f_{12}, \frac{\partial UM_Y}{\partial Q_Y} = f_{22}$$

لإثبات المعدل الحدي للإحلال ( الإبدال ) متنـــاقص نشـــتق المعـــدل الحدي للإحلال ويجب أن يكون المشتق أصغر من الصفر.

$$\frac{dTMS_{XY}}{dQ_X} = \frac{-d^2Q_y}{dQ_X^2} \langle 0$$

وباستخدام

$$\frac{d(TMS_{XY.})}{dQ_X} = \frac{d(\frac{UM_X}{UM_Y})}{dQ_X} = \frac{d(\frac{f1}{f2})}{dQ_X}$$

نحصل على

$$\frac{d(TMS_{XY})}{dQ_X} = \frac{\partial}{\partial Q_X}\left[\frac{f1}{f2}\right] + \frac{\partial}{\partial Q_Y}\left[\frac{f1}{f2}\right]\frac{dQ_Y}{dQ_X}$$

$$\frac{f_{11}f_2 - f_1 f_{21}}{f_2^2} + \frac{f_{12}f_2 - f_1 f_{22}}{f_2^2}(-\frac{f_1}{f_2})$$

$$\frac{f_{11}f_2^2 - 2f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22}}{f_2^3}$$

وبما أن $f_2^3 \rangle 0$ فإن تناقص معدل الإحلال السلعي يقتضي أن

$$f_{11}f_2^2 - 2f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22} \langle 0$$

وبما أن $f_1 \rangle 0, f_2 \rangle 0$ فإن ميل منحنى السواء يكون سالبا $0 \rangle \frac{dQ_Y}{dQ_X} \langle 0$

ويعني تقعر منحنى السواء إلى أعلى أن القيمة المطلقة لميله تصغر بزيـــادة كمية السلعة X، وحيث أن الميل سالب فإن معدل تغيره يجب أن يكون موجبا وبالتالي فشرط التقعر هو $\frac{d^2Q_Y}{dQ^2_X} \rangle 0$

وهو يعادل شرط تناقص المعدل الحدى للإحلال.

وبصورة أخرى فإن السلوك الرشيد للمستهلك يقتضي بأنه كلما زادت كمية X كلما نقصت كمية Y وأنه تتناقص المنفعة الحدية للسلعة X وتـــزداد المنفعـــة الحدية للسلعة Y أي أن المعدل الحدي للإحلال يكون ضعيفا وكذلك فإن ميل منحنى السواء $0 \rangle \frac{dQ_Y}{dQ_X}$.

وكذلك فإنه عندما تنقص كمية السلعة X تزداد كمية السلعة Y، وتزداد المنفعة الحدية للسلعة X وتنقص المنفعة الحديـــة للســـلعة Y أي أن المعـــدل الحدي للإحلال يكون كبيرا وكذلك فإن ميل منحنى السواء $1 \langle \frac{dQ_Y}{dQ_X}$ وهذا ما يعطي لمنحنى السواء شكله المقعر نحو الأعلى.

## 4 ـ خط الميزانية: ( خط الثمن )

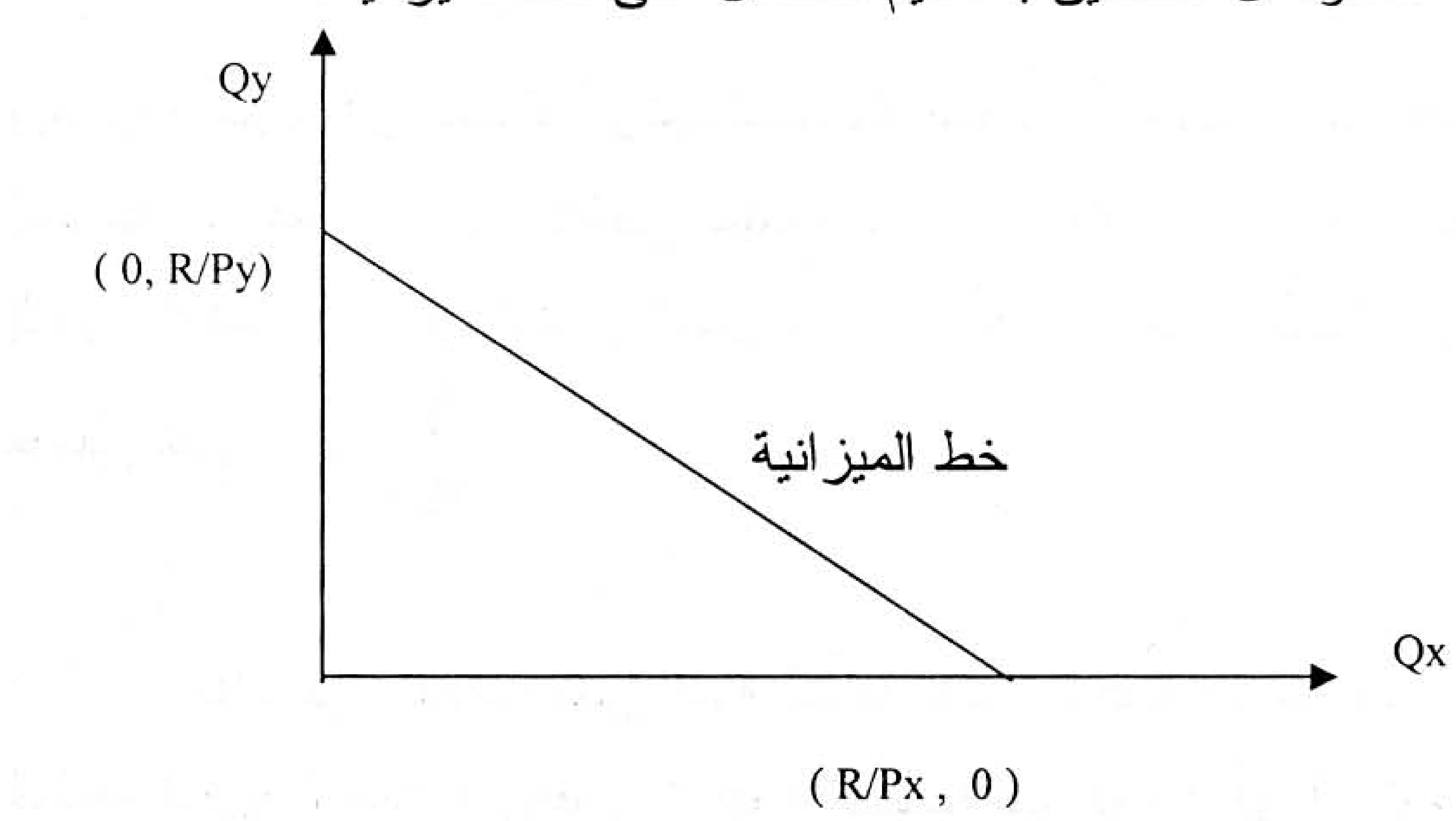
هو المحل الهندسي لجميع الثنائيات السلعية $(Q_x, Q_y)$ والتي تكـــون تكلفة كل منها كمية معينة من النقود ويمثل مجموع تكلفتها دخل المستهلك مع افتراض ثبات الأسعار، ومن خصائصه مستقيم ميله سالب.

لكي نرسم خط الميزانية:

ـ نفرض أن المستهلك لا يستهلك السلعة X فنحصل على تقاطع خـط الميزانية مع المحور العمودي ($0,\frac{R}{P_Y}$).

ـ نفرض أن المستهلك لا يستهلك السلعة Y فنحصل على تقاطع خـط الميزانية مع المحور الأفقي ($\frac{R}{P_X},0$)، أنظر الشكل رقم III . 5

ـ نوصل النقطتين بمستقيم فنحصل على خط الميزانية.




**الشكل III . 5**

**مثال 1**: الجدول التالي يبين التوليفات السلعية لثلاثة منحنيات سواء

**المطلوب**:

1 ـ أرسم منحنيات السواء هذه في محور إحداثيات

2 ـ ما هو الفرق بين منحنيات السواء الثلاثة.

3 ـ أحسب المعدل الحدي للإحلال.

4 ـ إذا كان $P_y = 1 , P_x = 2$ أرسم خط الميزانيـــة إذا علمــت أن حجم الدخل المنفق على السلعتين هو 16 دينار ثم عين التوليفة التي يكــون عندها المستهلك في حالة توازن.

5 ـ نفرض أن حجم الدخل المنفق تغير وأصبح 20 دينار أرسم خط الميزانية وعين التوليفة الجديدة التي يكون عندها المستهلك في حالة توازن.

6 ـ ما الفرق بين التوليفتين.

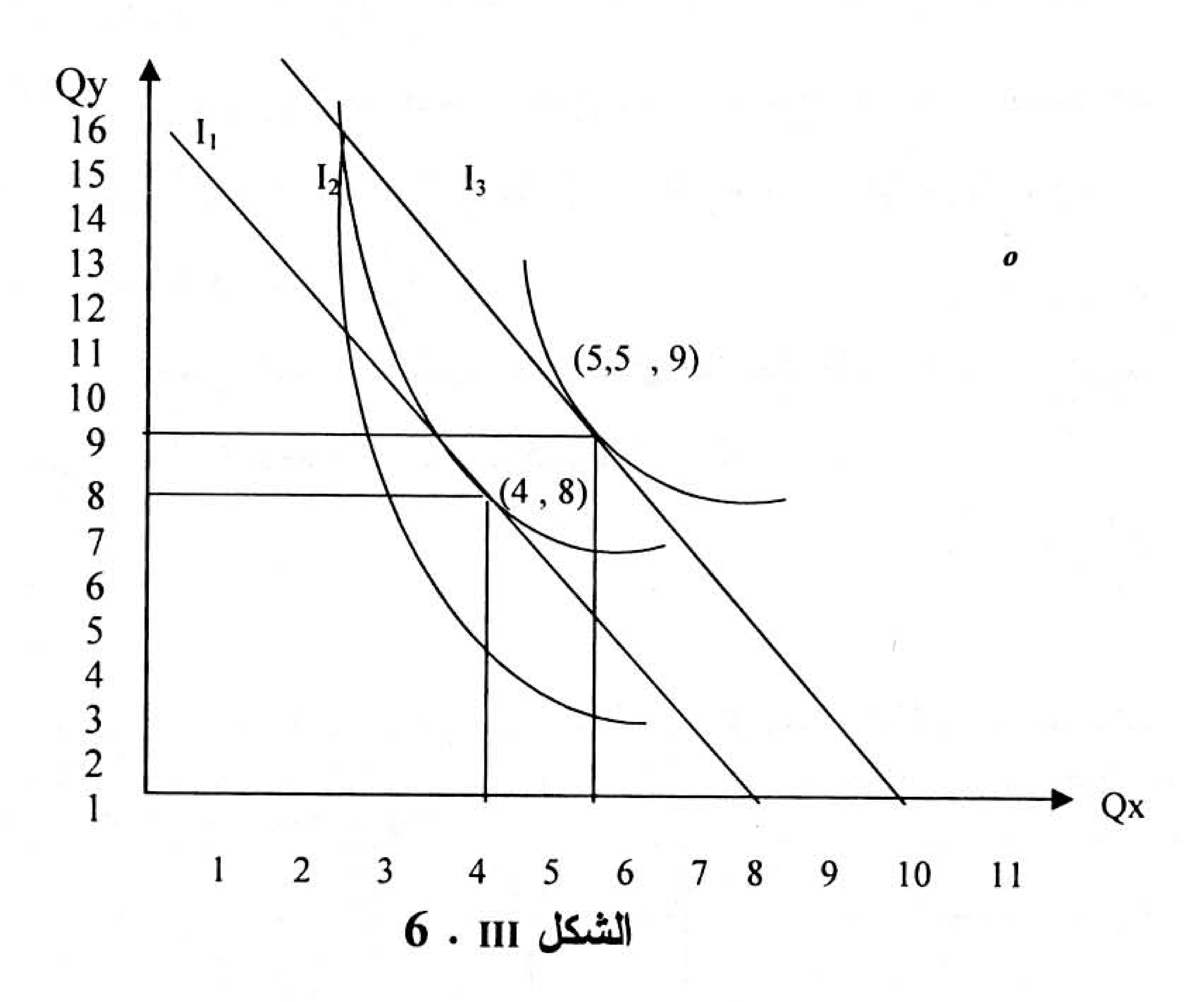
7 ـ ما معنى كلما توفرت سلعة ما لدى مستهلك كلما نقصت قــدرتها في أن تحل مكحل السلعة التي ندرت كميتها لدى المستهلك.

**ملاحظة:**

سنعطي جدول واحد مباشرة فيه التوليفات السلعية لثلاثــة منحنيــات السواء والإجابة على السؤال رقم 3

| I1 | | I2 | | I3 | | I1 | I2 | I3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_x$ | $Q_y$ | $Q_x$ | $Q_y$ | $Q_x$ | $Q_y$ | $TMS_{xy}$ | $TMS_{xy}$ | $TMS_{xy}$ |
| 2 | 13 | 3 | 12 | 5 | 12 | – | – | – |
| 3 | 6 | 4 | 8 | 5,5 | 9 | 7 | 4 | 6 |
| 4 | 4,5 | 5 | 6,3 | 6 | 8,3 | 1,5 | 1,7 | 1,4 |
| 5 | 3,5 | 6 | 5 | 7 | 7 | 1 | 1,3 | 1,3 |
| 6 | 3 | 7 | 4,4 | 8 | 6 | 0,5 | 6,6 | 1 |
| 7 | 2,7 | 8 | 4 | 9 | 5,4 | 0,3 | 0,4 | 0,6 |

1 ) لكي نرسم منحنيات السواء يجب أن نرسم منحنى وذلك بتمثيل في التوليفات المنتمية لمنحنى واحد على محور الإحداثيات وبعد ذلك نوصل بين هذه النقط ( أنظر الشكل رقم III . 6 ).




**الشكل III . 6**

2 ) تمثل المنحنى $I_3$ مستوى من المنفعة الكلية أكبـــر مـــن مســـتوى المنفعة الكلية الذي يمثله كل من المنحنيين $I_2$، $I_1$.

تمثل المنحنى $I_1$ مستوى من المنفعة الكلية أكبر من مستوى المنفعـــة الكلية الذي يمثله منحنى السواء $I_1$.

3 ) حساب المعدل الحدى للإحلال.

المعدل الحدي للإحلال هو $\frac{-dQ_Y}{dQ_X}$ ويكتب كذلك $\left|\frac{-dQ_Y}{dQ_X}\right|$

**مثال:** $Q_{X1} = 2$ ثم أصبحت $Q_{X2} = 3$

$Q_{y1} = 13$ ثم أصبحت $Q_{y2} = 6$

$$MRS_{XY} = \left|\frac{Q_{Y2} - Q_{Y1}}{Q_2 - Q_{X1}}\right| = \left|\frac{6-13}{3-2}\right| = |-7| = 7$$

ولقد كتبنا باقي النتائج في الجدول السابق.

4 ) **لرسم خط الميزانية مع المحور الأفقي:**

عندما $Q_y = 0$ فإن $Q_x = -\frac{R}{P_x} = \frac{16}{2} = 8$

إذن إحداثيات نقطة التقاطع هي: $(Q_x, Q_y) = (8 ، 0)$.

**تقاطع الميزانية مع المحور العمودي**

عندما $Q_x = 0$ فإن $Q_y = -\frac{R}{P_y} = \frac{16}{1} = 16$

إذن إحداثيات نقطة التقاطع هي: $(Q_x, Q_y) = (0 ، 16)$

بعد الحصول على إحداثيات نقطتي التقاطع نوصل بينهما بخط مستقيم

من الرسم البياني تظهر التوليفة السلعية التي تحقق توازن المستهلك هي:

$(Q_x, Q_y) = (4 ، 8)$ حيث

$$R = Q_x P_x + Q_y P_y = 4.2 + 8.1 = 16$$

5 ) لقد تغير الدخل وأصبح $R = 20$

عندما $Q_x = 0$ فإن $Q_y = \frac{R}{p_y} = \frac{20}{1} = 20$

عندما $Q_y = 0$ فإن $Q_y = \frac{R}{p_x} = \frac{20}{2} = 10$

لكي نرسم خط الميزانية نوصل بين $(Q_x, Q_y) = (10 ، 0)$،

$(Q_x, Q_y) = (0 ،20)$.

من الرسم البياني تظهر التوليفة السلعية التي تحقق توازن المستهلك

$(Q_X, Q_Y) = (5,5 ،9)$.

6 ) تحقق الوليفة السـلعية ( 9 ، 5,5 ) = $(Q_x , Q_y)$ للمسـتهلك إشباع أكبر مما تعطيه التوليفة السلعية ( 8 ، 4 ) = $(Q_x , Q_y)$ .

7 ) تعني عبارة كلما توفرت سلعة ما لدى المستهلك كلمـا نقصـت قدرتها في أن تحل محل السلعة التي ندرت كميتها لدى المسـتهلك تنـاقص المعدل الحدي للإحلال بين السلعتين.

**مثال 2 :**

لنعتبر دالة المنفعة الكلية $U = xy^{0.5}$ حيث تشير X إلى كمية السلعة X وتشير Y إلى كمية السلعة Y على منحنى سواء عندما U = 2.

نأخذ النقطة A ذات الإحداثيات $Y_A X_A$ ثم نقوم بإجراء تزايد مقداره $\Delta_x$ ابتداءا من $X_A$.

**المطلوب.**

1 ــ إعطاء عبارة $TMS_{xy}$ بين النقطتين A و B على منحنى السواء عندما $U = 2$ أي عند نفس الإشباع.

2 ــ نفرض أن $X_A = 1$ ، $\Delta_x = \frac{1}{2}$ فما هي قيمة $MRS_{xy}$

**الحل:**

عندما تكون $U = 2$ فإن $Y = \frac{U}{X^2} = \frac{4}{X^2}$

عند تغير X مقدار $\Delta_x$ بالتزايد مع ثبات الدخل والأسعار، للمحافظـة على مستوى الإشباع فإن Y تتناقص بالمقدار $\Delta_y$ .

$$MRS_{xy} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\frac{4}{(x+\Delta x)^2} - \frac{4}{X^2}}{\Delta X}$$

$$MRS_{sy} = \frac{-8X - 4\Delta X}{X^2 (x+\Delta x)^2} = \frac{-8(1) - 4(\frac{1}{2})}{(1)^2 (1+\frac{1}{2})^2} \frac{-10}{\frac{9}{4}}$$

$$MRS_{xy} = -\frac{40}{9} = -4,11$$

$$\left| MRS_{xy} \right| = 4,11$$

أي إذا زادت X بـــ 9 وحدات تنقص Y بـــ 40 وحدة أو إذا زادت X بـــ وحدة واحدة فإن Y تنقص بـــ 11. 4 وحدة حتى يحافظ المستهلك علـــى نفس مستوى الإشباع.

IV ـــ **السلوك الأمثل:** إن هدف المستهلك الرشيد هو تعظيم منفعته في حـــدود ميزانيتـــه والأســـعار الســـائدة فـــي الســـوق حيـــث

$$P = Qx\,Px + Qy\,Py$$

ولتعظيم منفعة المستهلك يوجد مجموعة من الطـــرق نقتصـــر علـــى البعض منها وهي: الطريقة البيانية ــ طريقة التعويض ــ طريقة مضـــاعف ــ لا قرابح، وبما أننا تعرضنا للطريقة البيانية في المثال رقم واحد الســـابق فلن نعطي مثال على هذه الطريقة، وإنما نقتصر ونجعل مراحلها أما بـــاقي الطرق فإننا سنبينها طريقة طريقة.

1 ــ **الطريقة البيانية**: نجعل مراحل هذه الطريقة فيما يلي:

1 ــ نستعمل هذه الطريقة إذا وجد جدول سواء حيث نقــوم برســم منحنيات السواء في محوري إحداثيات.

2 ــ نرسم خط الميزانية الذي معادلته $P = Qx\,Px + Qy\,Py$

3 ــ تمثل نقطة التماس بين منحنى السواء وخط الميزانيــة الثنائيــة السلعية التي تحقق للمستهلك منفعة صافية ممكنة في حدود ميزانيته وفي ظل الأسعار السائدة في السوق.

2 ــ **طريقة التعويض**: تتمثل طريقة التعويض في التعويض عن كمية إحدى السلعتين المحسوبة من قيد الميزانية في تابع المنفعة ويمكن أن نجمل ذلك في المراحل التالية

1 ــ نحسب قيمة ( كمية ) إحدى السلعتين من قيد الميزانية.

**مثال:** $Q_y = \frac{R - Q_x Px}{P_Y}$

2 ــ نعوض عن $Q_y$ في تابع المنفعة

$$U = f(Q_x, Q_y) = f(Q_x, \frac{R - Q_x P_x}{P_Y})$$

3 ــ وفي هذه الحالة تكون شروط التوازن هي:

الشرط اللازم للتوازن: هو وجود نقطة استقرار أي المشتق الأول لتابع المنفعة معدوم $\frac{dU}{dQ_X} = 0$

**الشرط الكافي للتوازن**: هو كون تابع المنفعة عند نقطة الإستقرار يكون أعظمي (نهاية عظمى). $\frac{d^2U}{d(Q_x)^2} \langle 0$

**مثال:**

إذا كانت دالة المنفعة الكلية للمستهلك ما من استهلاكه لسلعتين هي $U = Q_X^2 Q_Y$ وإذا خصص المستهلك 300 دينار للإنفاق على السلعتين وكان سعر الوحدة من السلعة X هو $P_X = 5$ وسعر الوحدة من السلعة Y هو $P_Y = 4$ أوجد الميزانية المثلى للمستهلك وحقق شروط التوازن؟

**الحل:**

الميزانية المثلى هي $P = Qx\ Px + Qy\ Py$

$$300 = 5Q_x + 4Q_y$$

شروط توازن المستهلك

نحسب قيمة Y من R

$$Q_y = \frac{300 - 5Q_x}{4}$$

**الشرط اللازم للتوازن:**

$$U = f\left(Q_x, \frac{300 - 5Q_x}{4}\right)$$

$$U = Q_x^2 Q_y = Q_x^2 \left(\frac{300 - 5Q_x}{4}\right)$$

$$U = \frac{300}{4} Q_x^2 - \frac{5}{4} Q_x^3$$

$$\frac{dU}{dQ_x} = 150 Q_x - \frac{15}{4} Q_x^2 = 0$$

$$Q_x (600 - 15 Q_x) = 0$$

$$Q_y = 75$$

أما $Q_x = 0$ وبالتالي $Q_y = 75$

وهذه الثنائية السلعية $(Q_x, Q_y) = (0,75)$ لا تحقق إفتراضنا أن المستهلك يستهلك السلعتين معا:

وإما $600 - 15Q_x = 0$ أي $Q_x = \frac{600}{15} = 40$

وبالتالي $Q_y = \frac{300 - 5\times 40}{4} = 25$

أي الثانئة السلعية التي تحقق توازن المستهلك هي:

$$(Q_x, Q_y) = (40 ، 25)$$

**الشرط الكافي للتوازن هو**

$$\frac{d^2U}{dQ_X^2} = 150 - \frac{30}{4}Q_n$$

فإذا عوضنا ***Qx = 0*** في هذا المشتق الثاني نجده

$$\frac{d^2U}{dQ_X^2} = 150 - \frac{30}{4}(0) = 150 \rangle 0$$

وبالتالي لا تحقق الثنائية السلعية $(Q_X, Q_Y) = (0,675)$ توازن المستهلك

وإذا عوضنا $Q_n = 40$ في المشتق الثاني نجده:

$$\frac{d^2U}{dQ^2} = 150 - \frac{30}{4}(40) = 150 - 300 = -150 \langle 0$$

إذن تحقق الثنائية السلعية $(Q_X, Q_Y) = (40,25)$ توازن المستهلك، وإذا عوضنا عن كمية السلعتين في قيد الميزانية نجده

$$R = Q_n P_n + Q_Y P_Y = 40,5 + 25,4 = 30$$

3 ـ طريقة مضاعف لاقرانج: في طريقة مضاعف لاقـرانج نتبـع المراحل التالية:

1) نكون تابع الهدف:

$$V = f(Q_X, Q_Y) + \lambda(R - Q_X P_X - Q_Y P_Y)$$

عندما $R - Q_X P_X + Q_Y P_Y = 0$ فإنه مهما تكون $\lambda$ ذات قيمة موجبة فـــإن تعظيم التابع V هو نفسه تابع المنفعة $U = f(Q_X , Q_Y)$

2) الشرط اللازم للتوازن: في الشرط اللازم للتوازن نبحث عن نقاط الإستقرار وذلك بمساواة المشتقات الجزئية الأولى لتابع الهدف بالنسبة إلـــى $\lambda, Q_Y, Q_X$ بالصفر

$$\frac{\partial V}{\partial Q_X} = \frac{\partial U}{\partial Q_X} - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial U / \partial Q_X}{P_X}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Q_Y} = \frac{\partial U}{\partial Q_Y} - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\partial U / \partial Q_Y}{P_Y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial Q_Y} = R - Q_X P_X - Q_Y P_Y = 0$$

ومن هذه المعادلات نحصل على الشروط التوازنية الشهيرة

$$\frac{\partial U / \partial Q_X}{P_X} = \frac{\partial U / \partial Q_Y}{P_Y} = \lambda$$

ويبين هذا الشرط أن نسبة المنفعة الحدية لكل سلعة إلى سعرها يجـــب أن تساوي النسبة المشتركة ( المضاعف $\lambda$ ) ومعنى هذا أن المنفعة الحديـــة لكل وحدة نقدية منفعة يجب أن تتعادل في جميع مجالات الإنفاق.

**3) الشرط الكافي:**

تكون المصفوفة الهيسية H ونستخلص منها المحـــددات التاليـــة التـــي تجعلنا أمام نهاية عظمى ( أرجع إلى التذكره الرياضية في الكتاب ).

$$H = \begin{vmatrix} \partial V^2 / \partial Q_X^2 & \partial^2 V / \partial Q_X \partial Q_Y & \partial^2 V / \partial \lambda \partial Q_X \\ \partial^2 V / \partial Q_Y \partial Q_X & \partial^2 V / \partial Q_Y^2 & \partial^2 V / \partial \lambda \partial Q_Y \\ \partial^2 V / \partial \lambda \partial Q_X & \partial^2 V / \partial \lambda \partial Q_Y & \partial^2 V / \partial \lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -P_1 \\ f_{21} & f_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} \rangle 0$$

نفك هذا المحدد نجد $-P_2^2 f_{11} + 2P_1 P_2 f_{12} - P_1^2 f_{22} \rangle 0$

وبقسمة الطرفين على $P_2^2$ وباستخدام شرط المنافع $\lambda = \frac{f_2}{P_2} = \frac{f_1}{P_1}$

وبالضرب في $f_2^2$ وتغير الإشارات نجد

$$f_2^2 x f_{11} + 2 f_1 f_2 f_{12} + f_1^2 f_{22} \langle 0$$

نستنتج الشرط الكافي للتوازن يعادل افتــراض تنــاقص المعــدل الحــدي للإحلال.

**<u>مثال:</u>**

إذا كانت دالة المنفعة الكلية $U = Q_X Q_Y$ وكان قيد الميزانية

$$R = Q_X P_X + Q_Y P_Y = Q_X + 3Q_Y = 10$$

المطلوب: حدد الثنائية السلعية التي تحقق للمستهلك توازنه في حــدود ميزانيته.

1) تابع الهدف:

$$V = U + \lambda(R - Q_X P_X + Q_Y P_Y)$$

$$V = Q_X Q_Y + \lambda(10 - Q_X - 3Q_Y)$$

الشرط اللازم للتوازن:

$$\frac{\partial V}{\partial Q_X} = Q_Y - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = Q_Y$$

$$\frac{\partial V}{\partial Q_X} = Q_X - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{Q_X}{3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 10 - Q_X - 30_Y = 0$$

ومن هذه المعادلات نستنتج شرط المنافع

$$\lambda = Q_Y = \frac{Q_X}{3}$$

للحصول على $Q_Y Q_X$ نستخدم $10 - Q_X - 3Q_Y = 0$

$$10 - Q_X - 3(\frac{Q_X}{3}) = 0 \Rightarrow 10 - 2Q_X = 0$$

$$Q_X = \frac{10}{2} = 5$$

$$Q_Y = \frac{1}{3} Q_X = \frac{1}{3}(3) = 1{,}66$$

الشرط الكافي

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -P_1 \\ f_{21} & f_{22} & -P_2 \\ -P_1 & -P_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = +6 \rangle 0$$

إذن تحقق الثنائية السلعية $(Q_X, Q_Y) = (5, \frac{5}{3})$

توازن المستهلك ويكون مستوى الإشباع يساوى

$$U = Q_X . Q_Y = 5 \quad \frac{5}{3} = \frac{25}{3} = 8{,}33$$

V ــ <u>اشتقاق دوال الطلب:</u>

يمكننا إشتقاق دوال الطلب من تحليل السلوك الأمثل للمستهلك، فمثلا وجدنا ثلاث معادلات تمثل الشرط اللازم لتوازن المستهلك عندما كانت $U = f(Q_X Q_Y)$ بدلالة ثلاث متغيرات هي $\lambda, Q_Y, Q_X$ وبحلها يمكننا الحصول على دالة الطلب التي تعبر عن كمية السلعة X ودالة الطلب التي تعبر عن كمية السلعة Y بدلالة الأسعار $P_Y P_X$ والدخل R أي أن طلب

المستهلك على كل من السلعة X والسلعة Y يعتمد في الحالة العامـــة علـــى أسعار السلعتين ودخل المستهلك.

**مثال:**

في مثالنا السابق عندما كانت $P_Y = 3,\ P_X = 1,\ \mathrm{U} = Q_X.Q_Y$

كان الشرط اللازم لتوازن المستهلك هو:

$$\frac{\partial V}{\partial Q_X} = Q_Y - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1Q_Y}{P_X} = Q_Y$$

$$\frac{\partial V}{\partial Q_Y} = Q_X - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{P_Y}Q_X = \frac{1}{3}Q_X$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = R - Q_X - 3Q_Y = 0$$

من المعادلات الثلاثة السابقة نستنتج

دالة طلب السلعة X $\quad Q_X = \dfrac{R}{2P_X}$

دالة طلب السلعة Y $\quad Q_Y = \dfrac{R}{2P_Y}$

مضاعف لافرانج $\lambda$ ويدل $\quad \lambda = \dfrac{R}{2P_X P_Y}$

هذا المضاعف عن تزايد المنفعة الناتج عن وحدة مضافة للدخل إذن الشرط اللازم للتوازن يمكننا الحصول على دوال الطلب بدلالـــة الأســـعار والدخل.

**ملاحظة**: من دوال الطلب السابقة نستنتج خاصيتين لهذه الدوال.

**الخاصة الأولى**: عند كل مجموعة من مجموعات الأســـعار والـــدخل تكون مجموعة واحدة من السلع المطلوبة لأنه تناظر كل مجموعة من قـــيم

الأسعار والدخل قيمة واحدة فقط للطلب يكون عندها المستهلك في حالة توازن.

<u>الخاصة الثانية</u>: إن دوال الطلب هي دوال متجانسة من الدرجة صفر في كل من الأسعار والدخل.

نفرض أن الأسعار والدخل قد تغيرت بنسبة واحدة K وبالتالي يكون قيد الميزانية $KR - KP_X\, Q_X - KP_Y\, Q_Y = 0$

تابع الهدف هو:

$$V = F(Q_X Q_Y) + \lambda(KR - KP_X Q_X - KP_Y Q_Y) \Rightarrow MAX$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial Q_X} &= \frac{\partial U}{\partial Q_X} - \lambda KP_X = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial Q_Y} &= \frac{\partial U}{\partial Q_Y} - \lambda KP_Y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{\partial U / \partial Q_X}{P_X} = \frac{\partial U / \partial Q_Y}{P_Y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = KR - KP_X Q_X - KP_Y Q_Y = 0$$

أما الشرط الثالث فبإمكاننا قسمته على K فنحصل على

$$R - P_X Q_X - P_Y Q_Y = 0$$

إذن نستنتج دالة الطلب المقابلة لمجموعة الأسعار والدخل $KR, KP_X, KP_Y$.

من نفس المعادلات التي نستنتج منها دالة الطلب المناظرة لمجموعة الأسعار والدخل ( $R, P_X, P_Y$ )

وبالتالي إذا حدث وتغيرت الأسعار والدخل بنفس النسبة K فإن الكميات المطلوبة لا تتغير لأن دخله الحقيقي لم يتغير وإنما تغير دخله الإسمي.

**VI – أثر الدخل واثر الإحلال**

نفرض أن سعر إحدى السلعتين وليكن سعر السلعة x قد انخفض مع ثبات باقي المحددات من دخل وسعر السلعة y . في هذه الحالة يظهر أثر الدخل وأثر الإحلال.

**1 – أثر الدخل:** عندما ينخفض سعر السلعة X يعني هذا زيادة الدخل الحقيقي للمستهلك، حيث توزع هذه الزيادة على طلب السلعتين بافتراض أن إحداهما لا تشكل سلعة رديئة. ويشير أثر الدخل إلى التغير الناتج في المشتريات وليس التغير في الدخل الإسمي للمستهلك.

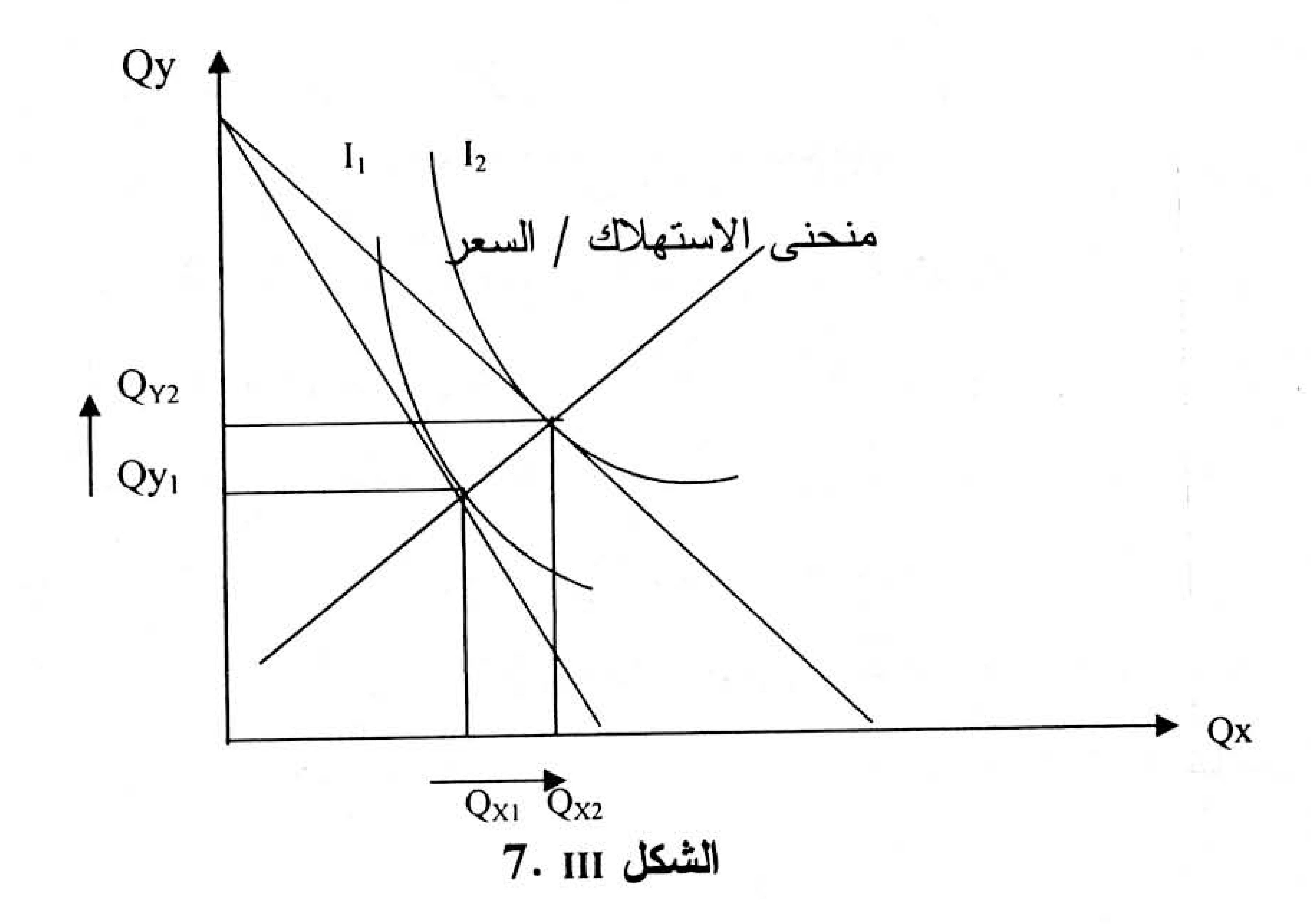
**2 – أثر الإحلال:** عندما ينخفض سعر السلعة X يعني هذا زيادة الدخل الحقيقي للمستهلك إلا أن المستهلك يطلب كمية أكبر من السلعة X وكمية أقل من السلعة Y، أي تحل السلعة X محل السلعة Y بحيث يحافظ المستهلك على نفس المستوى من الإشباع ( $dU = 0$ ).

ونطرح هنا سؤال كيف تتم الزيادة أو التخفيض في الطلب على السلعتين؟

يمكننا تلخيص الإجابة فيما يلي:

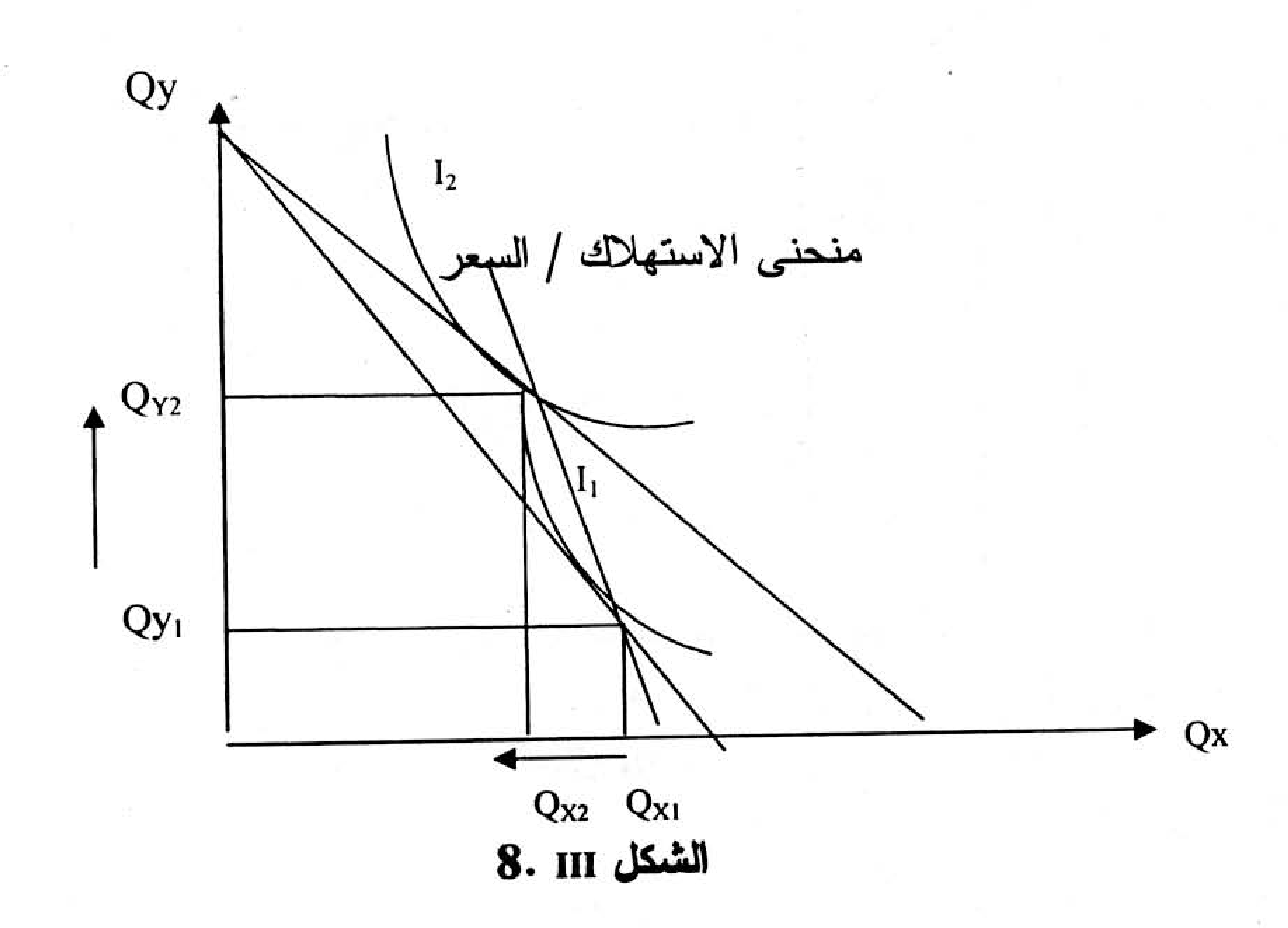
1) إذا كان أثر الدخل أكبر من أثر الإحلال فإنه:

– إما توزع الزيادة في الدخل الحقيقي على طلب السلعتين وبالتالي يزيد الطلب على كل من السلعتين والشكل III. 7 يبين ذلك.



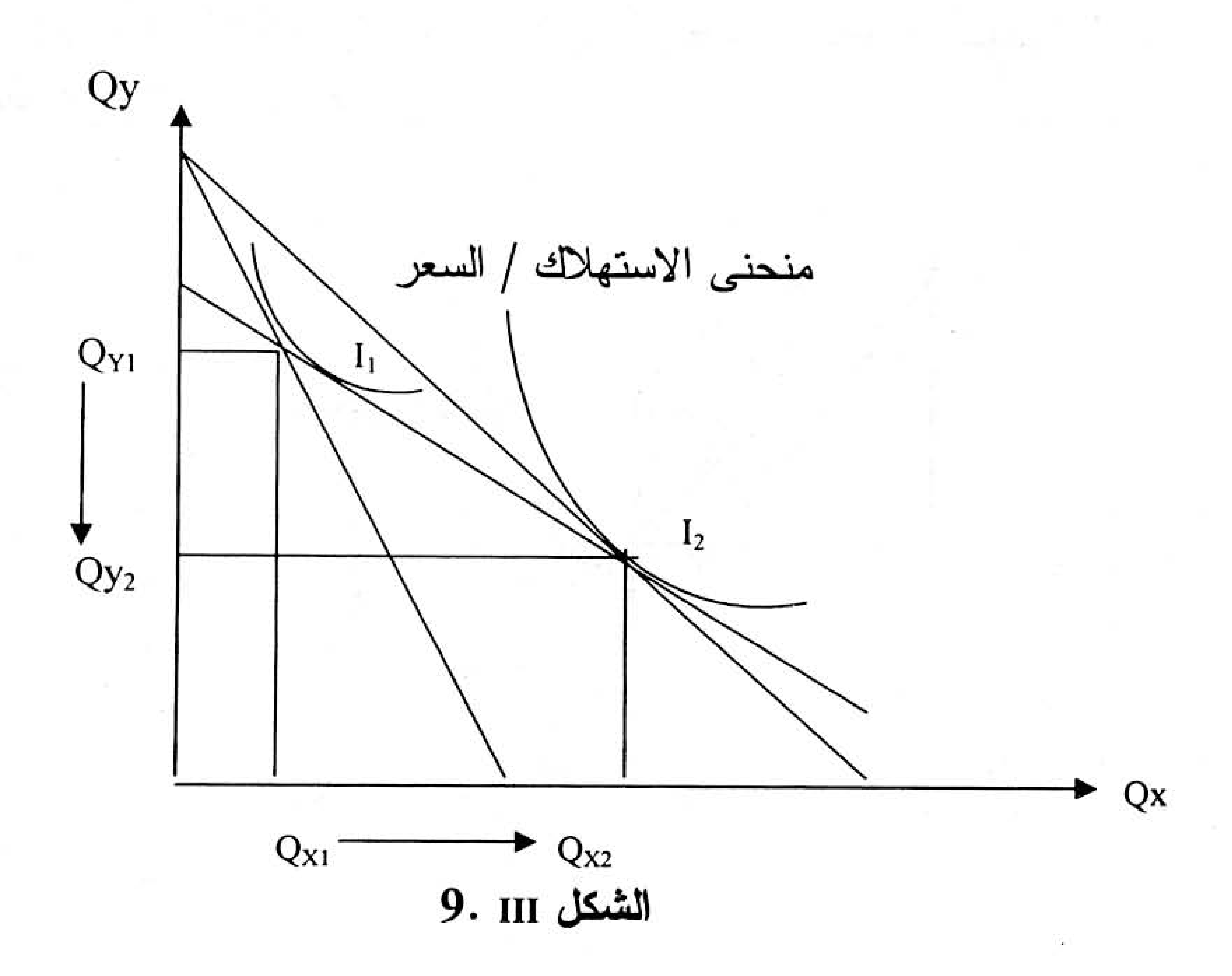

الشكل III .7

أو توجه الزيادة في الدخل الحقيقي إلى طلب السلعة Y وينقص طلب السلعة X. والشكل III. 8 يبين ذلك.




الشكل III .8

2) إذا كان أثر الدخل أقل من أثر الإحلال توجه الزيادة في الدخل الحقيقي لطلبة السلعة X بالإضافة إلى ذلك يقل طلبة السلعة Y والشكل رقم III.9 يبين ذلك. ومما سبق يتضح أن انخفاض سعر السلعة X يؤثر على طلب المستهلك عليها ويمكن تقسيم هذا الأثر إلى جزئين هما أثر الإحلال الذي يؤدي دائما في حالة انخفاض سعر السلعة إلى تمدد الطلب عليها (حسب قانون الطلب ) وفي حالة ارتفاع سعرها يؤدي إلى انكماش الطلب عليها، وأثر الدخل الذي يؤدي إلى زيادة الطلب عليها في حالة انخفاض السعر وإلى نقص الطلب عليها في حالة ارتفاع السعر ما لم تكن السلعة سلعة رديئة.




**الشكل III .9**

### 3 ـ التحليل الرياضي لأثر الدخل وأثر الإحلال:

للقيام بالتحليل الرياضي نقوم بإيجاد معادلة سلاتسكي

**معادلة سلاستكي:**

تحقق دائما كميات السلع التي يشتريها المستهلك الرشيد مجموعة معادلات:

$$f_1 + \lambda P_X = 0$$
$$f_2 + \lambda P_Y = 0$$
$$R - P_X Q_X - P_Y Q_Y = 0$$

وأن أي تغير يحدث في كل من الأسعار والدخل يؤدي بالمستهلك إلى تغير نمط إستهلاكه بحيث تحقق الكميات المستهلكة الجديدة المعادلات السابقة عند الأسعار الجديدة والدخل الجديد، ولتحديد أثر تغير كل من الأسعار والدخل على مشتريات المستهلك يجب حساب التفاصل الكلي للمعادلات السابقة.

$$f_{11}dQ_X + f_{12}dQ_y - P_X d\lambda = \lambda dP_X$$
$$f_{21}dQ_X + f_{22}dQ_y - P_Y d\lambda = \lambda dP_Y$$
$$-P_X dQ_X - Q_y dQ_Y = -dR + Q_X dP_X + Q_Y dp_Y$$

إذن يوجد لدينا ثلاث معادلات بها ثلاث مجاهيل هي $dQ_x$، $dQ_y$، $d\lambda$.

أما الطرف الأيمن من المعادلات الثلاث فهو ثابت على أساس التغيرات في الأسعار والدخل $dP_x$، $dP_y$، $dR$ معلومة (معطاة)، ومن هذه المعادلات يكون محدد المعاملات هو:

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -P_X \\ f_{21} & f_{22} & -P_Y \\ -P_X & -P_Y & 0 \end{vmatrix}$$

وحتى يكون الإشباع أعظمي يجب أن يكون $D > 0$.

وإذا رمزنا إلى مرافقا عنصر الصف I ، والعمود J بالرمز $D_{IJ}$ يمكننا إيجاد حل المعادلات السابقة بتطبيق قاعدة كرامر.

$$dQ_X = \frac{\lambda D_{11} dP_X + \lambda D_{21} dP_Y + D_{31}(-dR + Q_X dP_X + Q_Y dP_Y)}{D}$$

$$dQ_Y = \frac{\lambda D_{12} dP_X + \lambda D_{22} dP_Y + D_{32}(-dR + Q_X P_X + Q_Y P_Y)}{D}$$

### 1.3 ـ أثر تغير السعر:

إذا فرضنا ثبات $P_y$، R أي $dP_y = dR = 0$ يمكننا استنتاج معـــدل تغيـــر كمية السلع x بالنسبة لتغير سعرها.

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_X} = \frac{\partial_{11}}{D}.\lambda + \frac{\partial_{31}}{D} Q_X$$

### 2.3 ـ أثر تغيير الدخل:

إذا فرضنا ثبات $P_y$ ; $P_x$ أي $dP_x = dP_y = 0$ يمكننا استنتاج معدل تغيـــر معدل السلعة x بالنسبة إلى تغيير الدخل.

$$\frac{\partial Q_X}{\partial R} = -\frac{D_{31}}{D}$$

### 3.3 ـ أثر تغير السعر والدخل معا:

إذا فرضنا أنه اقترن تغير في السعر بتغير في الدخل يعوض أثر هذا التغير في السعر بحيث يظل المستهلك محافظا على نفس مســتوى الإشــباع $(dU = 0)$ نجد:

$$f_1 dQ_X + f_2 dQ_y = 0 \Leftrightarrow -P_X dQ_X + P_Y dQ_Y = 0$$

على أساس شرط التوازن $\frac{f_1}{f_2} = \frac{P_X}{P_Y}$ محقق.

بما أن : $P_X dQ_X + P_Y dQ_X = 0$ نجد من المعادلة الثالثة في الجملة السابقة:

$$-dR + Q_X dP_X + Q_Y dP_Y = 0$$

وبافتراض $dP_Y=0$ نجد معدل تغير كمية السلعة X بالنسبة إلى سعرها على أساس تعويض أثر الدخل R لأثر السعر $P_X$ وبحيث $dU = 0$ هو:

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_X} = \frac{D_{11}}{D}.\lambda$$

والآن يمكننا كتابة ما يلي:

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_X} = \frac{D_{11}}{D}.\lambda + \frac{D_{31}}{D} Q_X = (\frac{\partial Q_X}{\partial P_X}) - Q_X (\frac{\partial Q_X}{\partial R})$$

أثر الدخل أثر الإحلال أثر السعر

ويطلق على المعادلة التالية معادلة سلاتسكي:

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_X} = \frac{\partial Q_X}{\partial P_X} - Q_X \frac{\partial Q_X}{\partial R}$$

حيث تشير هذه المعادلة إلى مجموع الأثرين ( أثر الإحلال وأثر الدخل) وهي بالتالي تشير إلى الأثر الكلي لتغير سعر السلعة x على الكمية المشتراة منها.

### 4.3 ـ الآثار التبادلية:

يمكننا كما استنتجنا أثر سعر السلعة x على الكمية المطلوبة منها نستنتج أثر سعر السلعة x على الكمية المطلوبة من السلعة y كما نستنتج أثر سعر السلعة y على الكمية المطلوبة من السلعة x مما يسمى بالآثار التبادلية.

**ـ أثر سعر السلعة x على الكمية المطلوبة من السلعة y:**

$$\frac{\partial Q_Y}{\partial P_X} = \frac{D_{12}}{D}\lambda + \frac{D_{32}}{D}Q_X$$

أثر الإحلال

**ـ أثر سعر السلعة y على الكمية المطلوبة من السلعة x:**

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_Y} = \frac{D_{21}}{D}\lambda + \frac{D_{31}}{D}Q_Y$$

أثر الإحلال

ويمثل الحد الأول في الطرف الأيمن من المعادلتين السابقتين أثر الإحلال ونلاحظ أنه متساوي حيث $\frac{D_{12}}{D}\lambda = \frac{D_{21}}{D}\lambda$ أي أن أثر الإحلال للسلعة x الناتج عن تغير السلعة y يساوي أثر الإحلال للسلعة Y ، الناتج عن تغير سعر السلعة x. والجدير بالملاحظة هنا هو أن إشارة أثر الإحلال هي التي تحدد نوع السلع إذا كانت متكاملة أو متنافسة وعليه إذا كانت إشارة أثر الإحلال سالبة فإن السلعتين متكاملتان وأما إذا كانت الإشارة موجبة فإن السلعتين متبادلتان (متنافستان).

**مثال:**

1) لدينا تابع المنفعة $U = Q_x Q_y$ ودخل المستهلك $R = 100$، $P_x = 2$، $P_y = 5$.

يمكننا هنا حساب الكميات من السلعتين التي تحقق للمستهلك أكبر إشباع ممكن تابع الهدف

$$V = Q_X Q_Y + \lambda(R - Q_X P_X - Q_Y P_Y) = (MAX)$$

ـ <u>الشرط اللازم للتوازن</u>: نقوم في هذا الشرط بالبحث عن نقطة الاستقرار:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial Q_X} &= Q_Y - \lambda P_X = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial Q_Y} &= Q_X - \lambda P_Y = 0\end{aligned}\right\} = \lambda = \frac{Q_Y}{P_X} = \frac{Q_X}{P_Y} \Rightarrow Q_X = \frac{Q_Y P_Y}{P_X}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = R - Q_X P_X - Q_Y P_Y = 0$$

لدينا $Q_X = \frac{Q_Y P_Y}{P_X}$ وبالتعويض في $R - Q_X P_X - Q_Y P_Y = 0$ نجد

دالة طلب السلعة X هي: $Q_X = \frac{R}{2P_X}$

مضاعف لاقرانج هو:

$$\lambda = \frac{R}{2P_X P_Y}$$

دالة طلب السلعة Yهي:

$$Q_Y = \frac{R}{2P_Y}$$

مما سبق وبالتعويض عـــن $R$, $P_x$, $P_y$، نجـــد $(Q_x ،Q_y) = (25،10)$

و $\lambda = 5$

**ـ <u>الشرط الثاني للتوازن</u>:** يجب أن يكون المحدد D موجبا:

$$D = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & -P_X \\ f_{21} & f_{22} & -P_Y \\ -P_X & -P_Y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 20 \rangle 0$$

إذن الثنائية $(10 , 25) = (Q_x ،Q_y)$ تحقق للمستهلك أكبر إشباع.

2) نفرض أن سعر السلعة X هو فقط الذي تغير وعليه نجد أن معادلة سلاتسكي.

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_X} = \frac{\lambda D_{11}}{D} - \frac{D_{31}}{D} Q_X$$

لإيجاد أثر الإحلال وأثر الدخل وأثر السعر نحسب المحددات التالية:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & P_X \\ 1 & 0 & -P_Y \\ -P_X & -P_Y & 0 \end{vmatrix} = 2P_X P_Y$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -P_Y \\ -P_Y & 0 \end{vmatrix} = -P_Y^2$$

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -P_X \\ 0 & -P_Y \end{vmatrix} = -P_Y$$

إذن:

– <u>**أثر إحلال السلعة X بسبب تغير سعرها:**</u>

$$\frac{\lambda D_{11}}{D} = \frac{-P_Y \lambda}{2P_X} = \frac{-R}{4_X^2} = -\frac{100}{16} = -\frac{25}{4}$$

– <u>**أثر الدخل نتيجة تغير سعر السلعة X:**</u>

$$\frac{D_{31}}{D} Q_X = \frac{-P_Y \lambda}{2P_X} = -\frac{R_2}{4_X^2} = -\frac{25}{4}$$

– <u>**أثر السعر (الأثر الكلي):**</u>

$$\frac{\partial Q_X}{\partial P_X} = \frac{\lambda P_Y}{2P_X} - \frac{Q_X}{2P_X} = -\frac{25}{2} = -12,5$$

ويعني هذا إذا تغير سعر السلعة X بواحد دينار تتغير الكمية المطلوبة من السلعة X بمعدل 12,5 وحدة.

3) نحسب أثر الإحلال التبادلي:

$$\lambda \frac{D_{21}}{D} = \lambda \frac{D_{12}}{D}$$

$$D_{21} = D_{12}\begin{vmatrix} 1 & -P_Y \\ -P_X & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -P_Y \\ -R_X & 0 \end{vmatrix} = P_X P_Y$$

إذن

$$\lambda \frac{D_{21}}{D} = \left(\frac{R}{2P_X P_Y}\right)\left(\frac{P_X P_Y}{2P_X P_Y}\right) = \frac{R}{4P_X P_Y} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2} \rangle 0$$

بما أن أثر الإحلال التبادلي موجب فالسلعتان متنافستان (متبادلتان).



# مراجع الباب الثاني

## أولا : مراجع باللغة العربية :

1 ـ محمد علي الليثي، التحليل الاقتصادي، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، 1975.

2 ـ حلمي. م، هندرسون ريتشارد، أ، كوندت، ترجمة متوكل عباس مهلهل، نيويورك، دار ماكجو وهيل للنشر، 1983.

3 ـ محمود يونس محمد، عبد النعيم محمد مبارك، أساسيات علم الاقتصاد، بيروت، الدار الجامعية، 1985.

4 ـ أحمد جامع، النظرية الاقتصادية، الجزء الأول، التحليل الاقتصادي الجزئي، دار النهضة العربية، الطبعة الخامسة، 1986.

5 ـ د. نعمة الله نجيب إبراهيم، أسس علم الإقتصاد، الإسكندرية مؤسسة شباب الجامعة 1987.

6 ـ ضياء مجيد الموسوي، النظرية الإقتصادية، التحليل الإقتصادي الجزئي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية، 1989.

## ثانيا: المراجع باللغة الفرنسية

1 – Amami ( Mokhtar), Microéconomie, théories critiques et exercices pratiques. Quebec caetan Morin 1981.

2 – Cedras (Jacques), Analyses macroéconomie, Paris, Dalloz 1981

3 – Guerrie (Bernard), Microéconomie et calcul économique. Paris, Economica 1982.

4 – Lesourne ( Jacques), Analyses microéconomiques, Paris, ESI 1985.

5 – Fiori (G), Introduction élémentaire à la microéconomie. Librairie de l'université. Aisc en Provence 1986.

6 – Picard (Pierre), éléments de microéconomie, Théorie et applications, Paris montchrestien 1987.



# الباب الرابع
# نظرية سلوك المنتج

## تمهيد:

لقد تكلمنا في نظرية الطلب والعرض عن التوازن في ظل المنافسة التامة حيث يتم هذا التوازن بتفاعل قوى الطلب والعرض في السوق، كما أن المحدد الرئيسي للعرض هو الإنتاج الذي يقوم به المشروع، والمشروع هو الوحدة الإقتصادية التي تتخذ القرارات فيما يتعلق بإنتاج وبيع السلع. أما الإنتاج فهو إعداد ومواءمة الموارد لتصبح قابلة للاستهلاك، وذلك بتغيير طبيعتها الفيزيائية والكميائية.

ويمكن تعريف الإنتاج كذلك بأنه إيجاد منفعة أو إضافة منفعة جديدة. ويشتمل الإنتاج التغير المكاني (النقل ) والتغير الزماني ( التخزين ) ولقد تعارف الإقتصاديون على إطلاق الإنتاج على ما يلي:

أولا: العمليات التي تغير من شكل المادة الفيزيائي والكيميائي ( المنفعة الشكلية ).

ثانيا: عمليات التغيير المكاني ( المنفعة المكانية ).

ثالثا: عمليات التغيير الزماني ( المنفعة الزمنية ).

رابعا: الخدمات التي تسهل عملية التبادل ( المنفعة التمليكية ).

خامسا: الخدمات وهي الإنتاج غير المادي كالأعمال التي يقوم بها المدرسون، الأطباء، والمحامون. ومن الضروري أن يقرر المشروع ماذا وكيف ينتج ما تقرر إنتاجه، وبأي الكميات ؟

ونفترض أن المشروع يعدل من حجم إنتاجه بحيث يتعادل مع معدل المبيعات على أساس إفتراض عدم وجود مخزون سلعي أو سلع تحت التشغيل ( هذا للتسهيل ). لأننا سنتعرض للمخزون في كتاب خاص بنظرية المخزون وبالتالي تعامل قيمة الإنتاج والمبيعات على أنهما متماثلتان.

ويفترض أن المشروع يتخذ قراراته من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن والربح هو الفرق بين قيمة المبيعات ( الإيرادات ) والتكاليف.

وللحصول على الإنتاج يقوم المشروع بتحويل مدخلاته (المستخدمات ) الإنتاجية وفقا لقواعد فنية تحددها دالة الإنتاج إلى منتجات نهائية بالنسبة لهذا المشروع:

نستنتج مما ذكرناه سابقا نوعين من الكفاءة الإنتاجية هما:

<u>**الكفاءة الفنية**</u>: وهي تقيس كمية المستخدمات في صورة عينية على افتراض أن كمية معينة من السلعة تتطلب استخدام مجموعة من عوامل الإنتاج وفق أساليب فنية مختلفة يكون أحدها أكفؤها أي يستخدم هذا الأسلوب كمية أقل من عوامل الإنتاج.

<u>**الكفاءة الإقتصادية**</u>: وهي تقيس الإستخدام من ناحية التكاليف على أساس أن أحد الأساليب المستخدمة في الإنتاج يكون أقل تكلفة من غيره.

إننا في هذا الباب نتناول دوال الإنتاج في الفترة القصيرة والفترة الطويلة أما في الفترة القصيرة جدا فلا يمكن تغيير عنصر من عناصر الإنتاج.

- نفقات الإنتاج.
- إيرادات الإنتاج.



# الفصل الأول

# دوال الإنتـــــــــاج

I ـ **دالة الإنتاج**: هي العلاقة المادية بين الكميات المستخدمة من عوامل الإنتاج والكمية المنتجة حيث يمثل Q المتغير التابع وهو كمية الإنتاج $Q = f(K, L, ....)$

أما L , K فهي المتغيرات المستقلة حيث تمثل عوامل الإنتاج المستخدمة في الإنتاج كرأس المال والعمل على الترتيب.

1 ـ **دالة الإنتاج في الفترة القصيرة**: وهي الفترة التي يمكن فيها تغيير بعض عوامل الإنتاج كالعمل وعلى هذا الأساس مثلا نفترض العامل الإنتاج المتغير هو العمل وهذا يظهر قانون يحكم هذه الدالة يسمى بقانون تناقص الغلة ( قانون الغلة غير النسبية ).

1. 1 ـ المستخدمات الثابتة: هي المستخدمات اللازمة للإنتاج والتي تتغير كميتها بتغير حجم الإنتاج، وتكاليف هذه المستخدمات يتحملها المشروع بغض النظر عن مستوى الإنتاج في الفترة القصيرة.

1. 2 ـ المستخدمات المتغيرة: هي المستخدمات التي تتغير كمياتها المستخدمة بتغير حجم الإنتاج.

1. 3 ـ قانون تناقص الغلة ( قانون الغلة غير النسبية ):

يقرر هذا القانون إذا زدنا أحد عوامل الإنتاج بكميات متساوية مع ثبات باقي عوامل الإنتاج الأخرى فإن الناتج الكلي سوف يزيد، ولكن بعد حين فإن الزيادة في النتائج سوف تكون أصغر ثم أصغر.

مثال: في هذا المثال نبين العلاقة المادية ( العينية ) بين مقدار ما يستخدم من عوامل الإنتاج ومقدار ما ينتج عن هذا الإستخدام من منتجات ولنفترض أننا نقوم بتسع تجارب لتسع عمليات إنتاجية لمنتج ما هو القمح. وفي الجدول الآتي نبين كمية العمل ( وهو العامل المتغير ).

والناتج الكلي للعمل والناتج المتوسط والناتج الحدى، أما باقي العوامل الإنتاجية كالأرض ورأس المال فهي ثابتة في تجاربنا.

| رقم التجربة | العمال | الناتج الكلي | الناتج المتوسط | الناتج الحدي |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 10 | 10 | 10 |
| 2 | 2 | 28 | 14 | 18 |
| 3 | 3 | 54 | 18 | 26 |
| 4 | 4 | 80 | 20 | 26 |
| 5 | 5 | 100 | 20 | 20 |
| 6 | 6 | 108 | 18 | 08 |
| 7 | 7 | 112 | 16 | 04 |
| 8 | 8 | 112 | 14 | 00 |
| 9 | 9 | 108 | 12 | 04 - |

ـ الناتج الكلي ( الإنتاج الكلي ): هو عبارة عن الكمية الكلية المنتجة من السلعة نتيجة إستخدام كميات مختلفة من العنصر المتغير عند مستوى معين من العنصر الإنتاجي الثابت ونرمز له بالرمز (... $Q = TP = F\ (K, 1$ ...)

ـ الناتج المتوسط ( الإنتاج المتوسط ) للعمل: هو عبارة عن معدل أو نسبة الناتج الكلي في عملية إنتاجية معينة إلى كمية عامل الإنتاج المذكور (هنا هو عدد العمال ) ونرمز له بالرمز $AP_L$

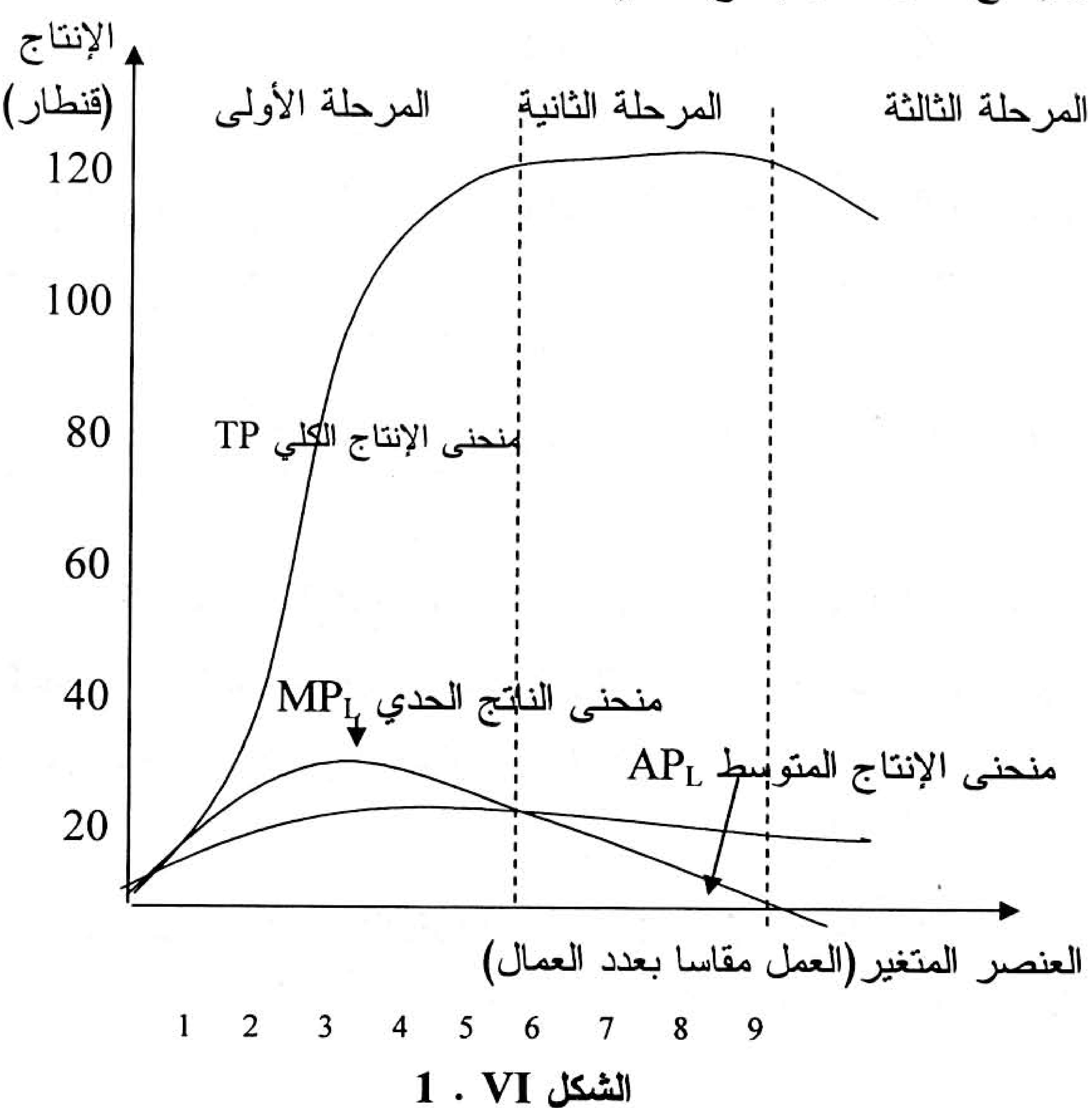
$$AP_L = \frac{TP}{L}$$

ـ <u>الناتج الحدي ( الإنتاج الحدي ) للعمل</u>: هو مقدار التغير الذي يحدث في الناتج الكلي في عملية إنتاجية معينة بسبب إضافة وحدة واحدة من عامل الإنتاج المذكور (هنا العمال) ونرمز له بالرمز $MP_1$.

وبعبارة أخرى هو التفاضل الجزئي لدالة الإنتاج بالنسبة لعنصر إنتاجي معين

$$MP_1 = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = Lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \frac{\partial Q}{\partial L}$$

وفي الشكل رقم VI . 1 نبين الأشكال البيانية لكل من الإنتاج الكلي والإنتاج المتوسط والإنتاج الحدي.




**الشكل VI . 1**

من خلال الجدول السابق إستخلصنا عدة منحنيات يطلق عليها منحنيات الناتج، وإن منحنيات الناتج هي جوهر قوانين الغلة، وقوانين الغلة هي جوهر منحنيات النفقة، ومنحنيات النفقة مشتقة من منحنيات الناتج.

ومن الجدول ومن الشكل السابق لمنحنيات الناتج نلاحظ أن: تغير الغلة بزيادة عامل إنتاجي واحد وتثبيت باقي عوامل الإنتاج يمر بثلاث مراحل.

المرحلة الأولي:

في هذه المرحلة يزيد الناتج الكلي بمعدل متزايد في أول الأمر ثم يزيد بمعدل متناقص وأما الناتج المتوسط فإنه يتزايد حتى يصل إلى النهاية العظمي، وأما الناتج الحدي فإنه يتزايد ثم يبدأ في الإنخفاض. والجدير بالذكر هو كون الزيادات في الناتج المتوسط ما هي إلا الزيادات في الكفاية الإنتاجية لعنصر العمل.

المرحلة الثانية:

تبدأ من النقطة التي يبلغ عندها منحنى الناتج المتوسط نهايته العظمى، وبعد هذه النقطة يبدأ الناتج المتوسط في الإنخفاض مما يعبر عن انخفاض في إنتاجية العامل.

وأما الناتج الحدى فإنه يستمر في الإنخفاض حتى النقطة التي يصبح عندها يساوي الصفر، حيث عند هذه النقطة يصل الناتج الكلي نهايته العظمى مما يدل على أن إنتاجية العنصر الثابت في هذه المرحلة متزايدة مما أدى إلى زيادة الناتج الكلي بالرغم من إنخفاض إنتاجية العامل خلال هذه المرحلة.

المرحلة الثالثة:

تبدأ من نقطة تساوي الناتج الحدى بالصفر، وفي هذه المرحلة يستمر إنخفاض كل من الناتج الحدى ( يصبح سالبا ) والناتج المتوسط، وكذلك يبدأ الناتج الكلي في الإنخفاض مما يدل على انخفاض إنتاجية كل من العناصر الإنتاجية الثابتة والمتغيرة.

**ملاحظات هامة:**

1 ـ يقطع منحنى الناتج الحدى منحنى الناتج المتوسط عندما يكون منحنى الناتج المتوسط عند حده الأقصى، أي الناتج المتوسط يساوي الناتج الحدى.

2 ـ عندما يكون الناتج المتوسط في زيادة، فإن الناتج الحدى يكون أكبر من الناتج المتوسط.

3 ـ عندما يكون الناتج المتوسط في نقصان، فإن الناتج الحدي يكون أقل من الناتج المتوسط.

4 ـ إذا اختار المنتج المرحلة الأولى فهذا يعني أنه يستخدم كمية كبيرة من العنصر الثابت ( الإنتاجية الحدية له سالبة أو مساوية للصفر ) وكمية قليلة من العنصر المتغير.

5 ـ إذا اختار المرحلة الثالثة فمعنى هذا أنه يستخدم كمية كبيرة من العنصر المتغير ( الإنتاجية الحدية له سالبة أو مساوية للصفر ) وكمية قليلة من العنصر الثابت.

6 ـ أن المرحلة الثانية هي أحسن مرحلة للإنتاج وتسمى بالمنطقة الإقتصادية للإنتاج.

7 ـ تكون الكفاءة القصوى للعنصر المتغير في مثالنا السابق (العمل ) عندما يكون الناتج المتوسط لعنصر العمل عند حده الأقصى.

8 ـ تكون الكفاءة القصوى للعنصر الثابت في مثالنا السابق (الأرض، ورأس المال ) عندما يكون الناتج الحدى للعنصر المتغير يساوى الصفر.

9 ـ أن تزايد الغلة ثم تناقصها بعد ذلك سببه كون التآلف بين عناصر الإنتاج يكون أكفء ما يمكن إذا كانت نسبة المزج بين عناصر الإنتاج مثلى وهذا من الناحية الفنية.

## 2 ـ دالة الإنتاج في الفترة الطويلة:

إن التحليل السابق ينطبق على الفترة القصيرة، لأنه لا يمكن تغيير جميع عوامل الإنتاج، وإنما يمكن تغيير بعضها كالعمل، وعليه يظهر قانون تناقص الغلة، أما في الفترة الطويلة فيمكن تغيير جميع عوامل الإنتاج ونستفيد من غلة الحجم.

### 2. 1 ـ غلة الحجم:

يقصد بغلة الحجم أن زيادة المستخدم من كل العوامل الإنتاجية بنسبة معينة قد يؤدي إلى زيادة المنتج بنفس النسبة، ولكن ليس شرطا حدوث هذا في كل الحالات، ومعنى هذا عندما تزيد المؤسسة من الكميات المستخدمة من العوامل الإنتاجية فإنه من المحتمل أن يزيد المنتج أولا بسرعة أكبر من معدل الزيادة في المستخدم من العوامل الإنتاجية، ثم ينقص في النهاية مارا بثلاث مراحل هي:

المرحلة الأولى: زيادة غلة الحجم:

هي المرحلة التي تؤدي فيها زيادة المستخدم بنسبة معينة إلى زيادة المنتج بنسبة أكبر، والسبب في ذلك هو:

ـ عدم قابلية بعض العوامل الإنتاجية للتجزئة كالأفران.

ـ الاستفادة من مزايا التخصص.

المرحلة الثانية: ثبات غلة الحجم:

عندما تزيد المؤسسة من حجم عملياتها تقضي على الوفورات التي تؤدي إلى زيادة الغلة، وبالتالي تصبح زيادة المستخدم تؤدي إلى زيادة الغلة بنفس النسبة.

المرحلة الثالثة: تناقص غلة الحجم:

إذا استمرت المؤسسة في التوسع في حجم عملياتها فإن غلة الحجم بعد حد معين ستميل إلى التناقص.

مما سبق نلاحظ أنه تختلف دالة الإنتاج في الأجل القصير عنها في الأجل الطويل وذلك للأسباب التالية:

1 ـ لا يستطيع المنظم في الأجل القصير تغيير مستوى مستلزمات (عوامل ) الإنتاج الثابتة.

2 ـ لا يتغير شكل دالة الإنتاج في الأجل القصير بسبب التقدم التكنولوجي.

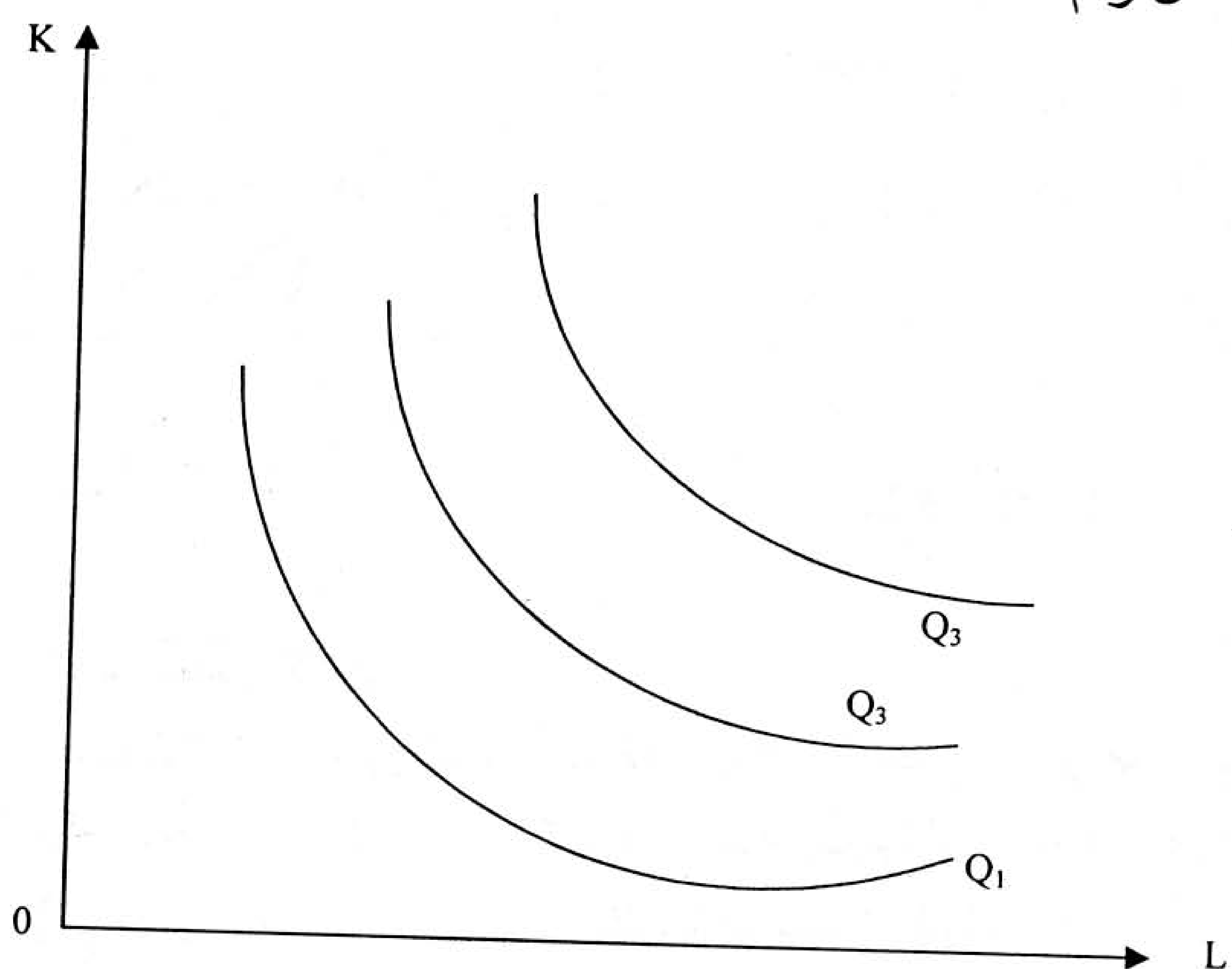
3 ـ تتم العمليات الإنتاجية في الأجل القصير بإستخدام الطاقة الإنتاجية القائمة.

2 .2 ـ منحنى الناتج المتساوي:

هو عبارة عن المحل الهندسي للتوليفات المختلفة مـن العمـل ورأس المال التي تعطي نفس المستوى من الإنتاج $Q = F(L, K)$.

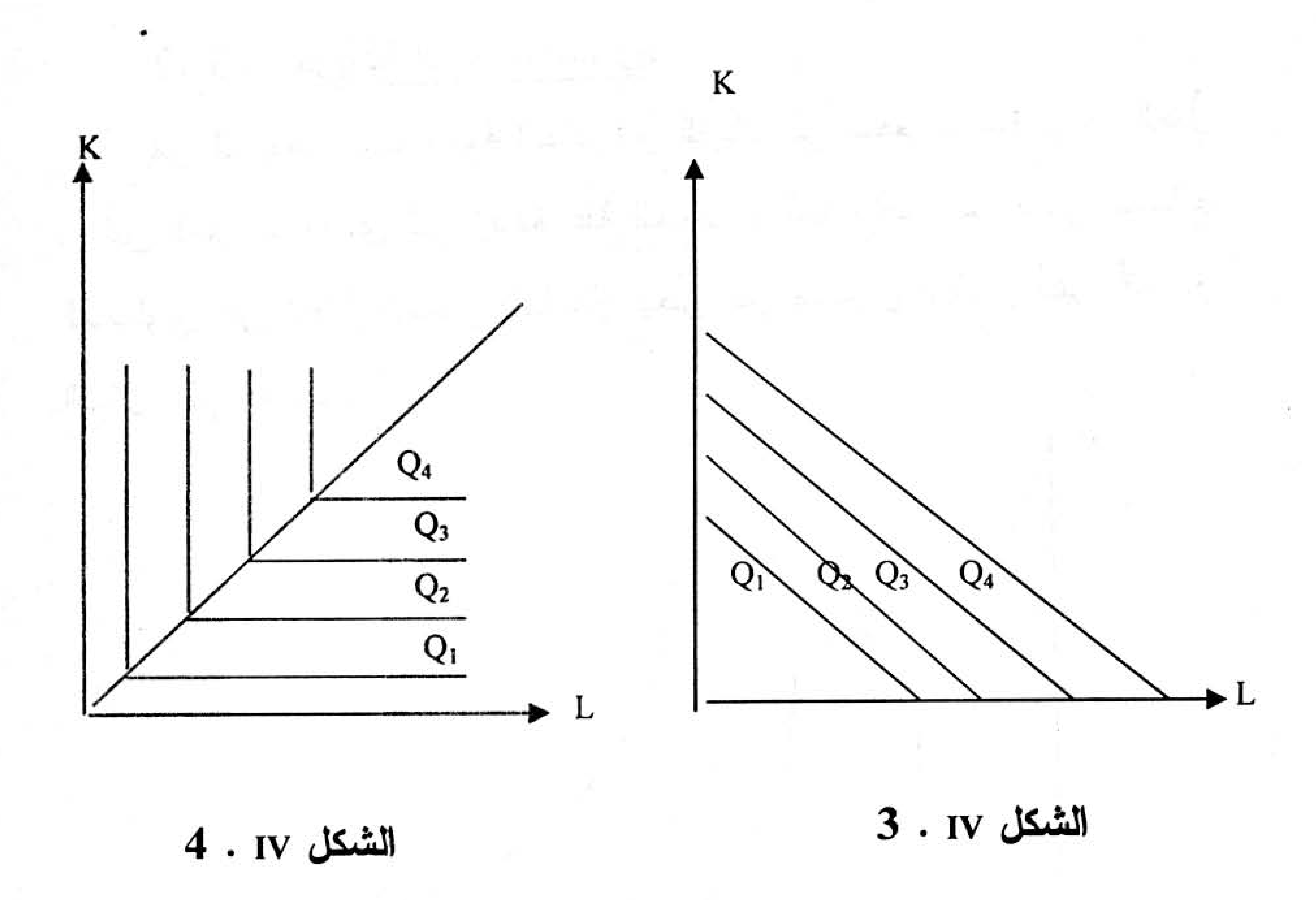
3 .2 ـ خريطة الناتج المتساوي:

من الطبيعي حسب غلة الحجم فإن الزيادة في حجم المستخدم من العمل ورأس المال قد تؤدي إلى زيادة غلة الحجم، وكلما ابتعـد منحنـى النـاتج المتساوي عن نقطة الأصل كلما كان يعبر عن مستوى إنتاجي أكبر أنظـر الشكل رقم IV . 2.




**الشكل VI . 2**

ويمكن أن نأخذ منحنيات الناتج المتساوي أشكالا أخرى عندما يكون L , K بديلتين بشكل تام ( أنظر الشكل رقم IV . 3 )، وعند استخدام نسبة ثابتة من L , K بحيث يكون L , K مكملتين بشكل تام ( أنظر الشكل رقم IV . 4 ).




الشكل IV . 4

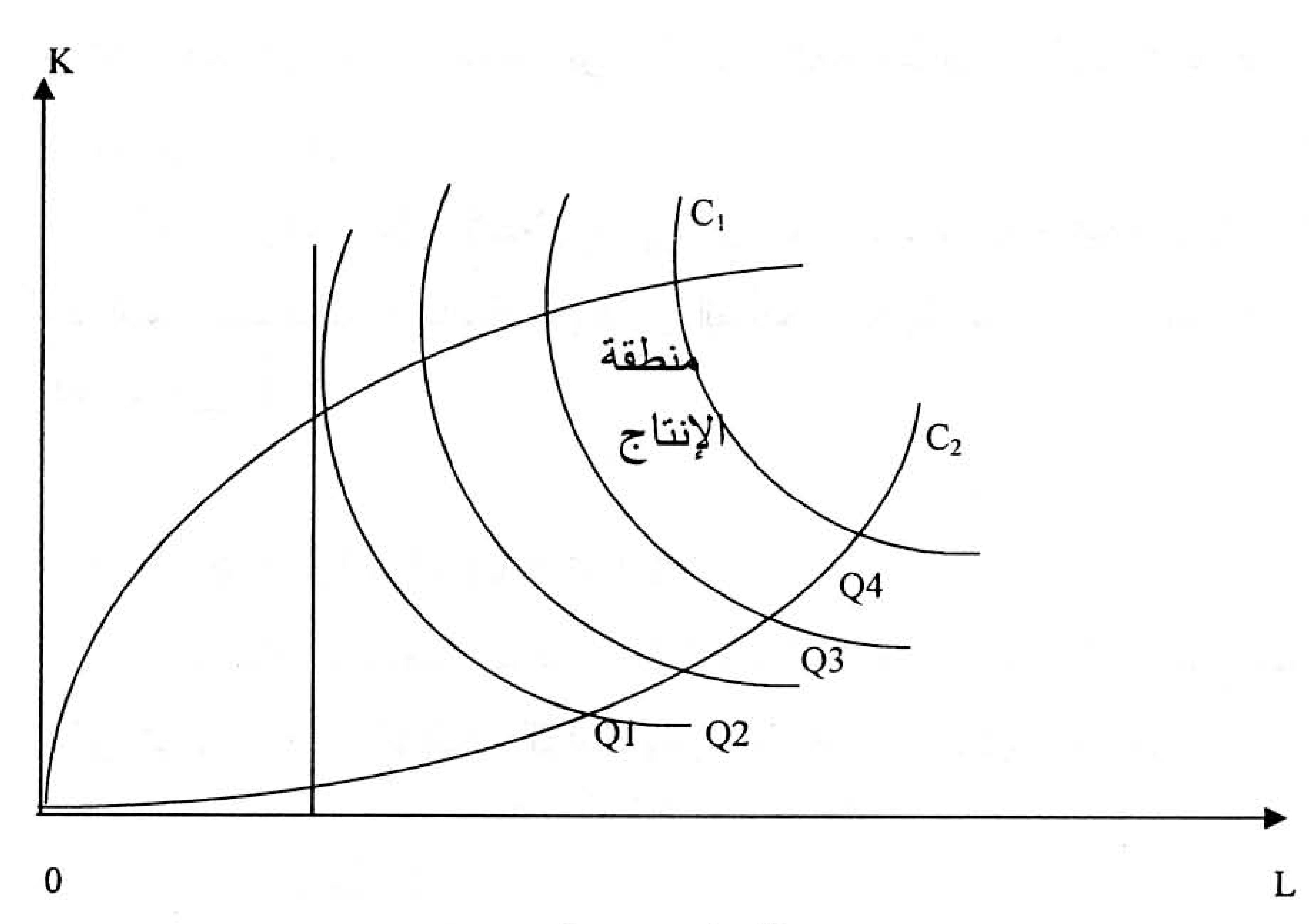
الشكل IV . 3

### 2. 4 ـ منطقة الإنتاج:

هي المنطقة التي تحقق كفاءة فنية أكبر وكفاءة إقتصادية أكبر فمثلا : لإنتاج مستوى معين من الإنتاج $Q_1$ يمكننا استخدام التوليفة $(K_1, L_1)$ من عاملي الإنتاج رأس المال والعمل، كما يمكننا استخدام التوليفة $(K_2, L_2)$ لإنتاج نفس المستوى من الإنتاج إلا أن التوليفة $(K_1, L_1)$ تمثل مستوى من الاستخدام لعوامل الإنتاج أقل مما تمثله التوليفة ( $K_2$, $L_2$)، وعليه فإن التكاليف عند التوليفة الأخيرة تكون أكبر من التكاليف عند التوليفة ( $K_1$, $L_1$)، وعليه فإن المنتج يختار التوليفة التي تكون أقل في مستوى الاستخدام لعوامل

الإنتاج وأقل في التكاليف للحصول على نفس المستوى من الإنتـــاج، ومـــن ناحية أخرى يحدث أحيانا أن تصبح الإنتاجية الحدية لأحد عوامـــل الإنتـــاج سالبة إذا زاد الإستخدام عن حد معين.

وأخيرا نفرض أن المنتج رشيد ولن ينتج أبدا على الجزء من منحنى الناتج المتساوي ذي الميل الموجب في الشكل رقم IV . 5 يحـــدد القوســـان $OC_1$ , $OC_2$ حافة الإنتاجية وهي المنطقة التي لا يخرج عنها المنتج الرشيد.




**الشكل IV . 5**

## 2. 5 ـ معدل الإحلال الفني RTS

إن التفاضل الكلي لدالة الإنتاج بشرط أن يكون التغيـــر فـــي الإنتـــاج يساوي صفر أي يبقى المنتج على نفس منحنى الناتج المتساوي

$$dQ = f_L d1 + f_K dK = 0$$

حيث يمثل FL الإنتاجية الحدية للعمل $MP_1$ وهي عبارة عن المشتق الجزئي الأول لدالة الإنتاج بالنسبة للعمل.

وحيث يمثل $f_K$ الإنتاجية الحدية لرأس المال $MP_K$ وهي عبارة عن المشتق الجزئي الأول لدالة الإنتاج بالنسبة لرأس المال، ومنها :

$$RTS_{LK} = -\frac{dK}{D1} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{f1}{f_K}$$

وبالتالي، فإن معدل الإحلال الفني عند أي نقطة على أحد منحنيات الناتج المتساوي يساوي النسبة بين الإنتاجية الحدية للعمل إلى الإنتاجية الحدية لرأس المال.

إذن نعرف معدل الإحلال الفني: هو معدل يتم بموجبه استبدال كمية معينة من المستخدم L بكمية معينة من المستخدم K بشرط أن يبقي مستوى الإنتاح ثابت.

### 2. 6 ـ خط التكاليف المتساوية:

يمثل خط التكاليف المتساوية التوليفات المختلفة من عوامل الإنتاج التي يمكن شراؤها بنفس التكاليف الكلية، وأن معادلة خط التكاليف هي:

$$\overline{C} = KP_K + L.P_1 + \overline{F}$$

حيث $\overline{C}$ معلمة

وحيث يمثل $P_K$ للعائد على رأس المال.

ويمثل $P_1$ معدل الأجر ( العائد على العمل )

وتمثل $\overline{F}$ تكاليف العوامل الثابتة.

ويمكن كتابة معادلة خط التكاليف على الشكل التالي:

$$K = \frac{\overline{C} - \overline{F}}{P_K} - \frac{P_L}{P_K} - L$$

إذا فرضنا أن كل الموارد المخصصة لشراء المستخدمات الإنتاجية أنفقت على رأس المال فإن نقطة تقاطع خط التكاليف المتساوية مع المحور العمودي ( محور كميات عنصر رأس المال هي ) $(0,\frac{\overline{C}-\overline{F}}{P_K})$

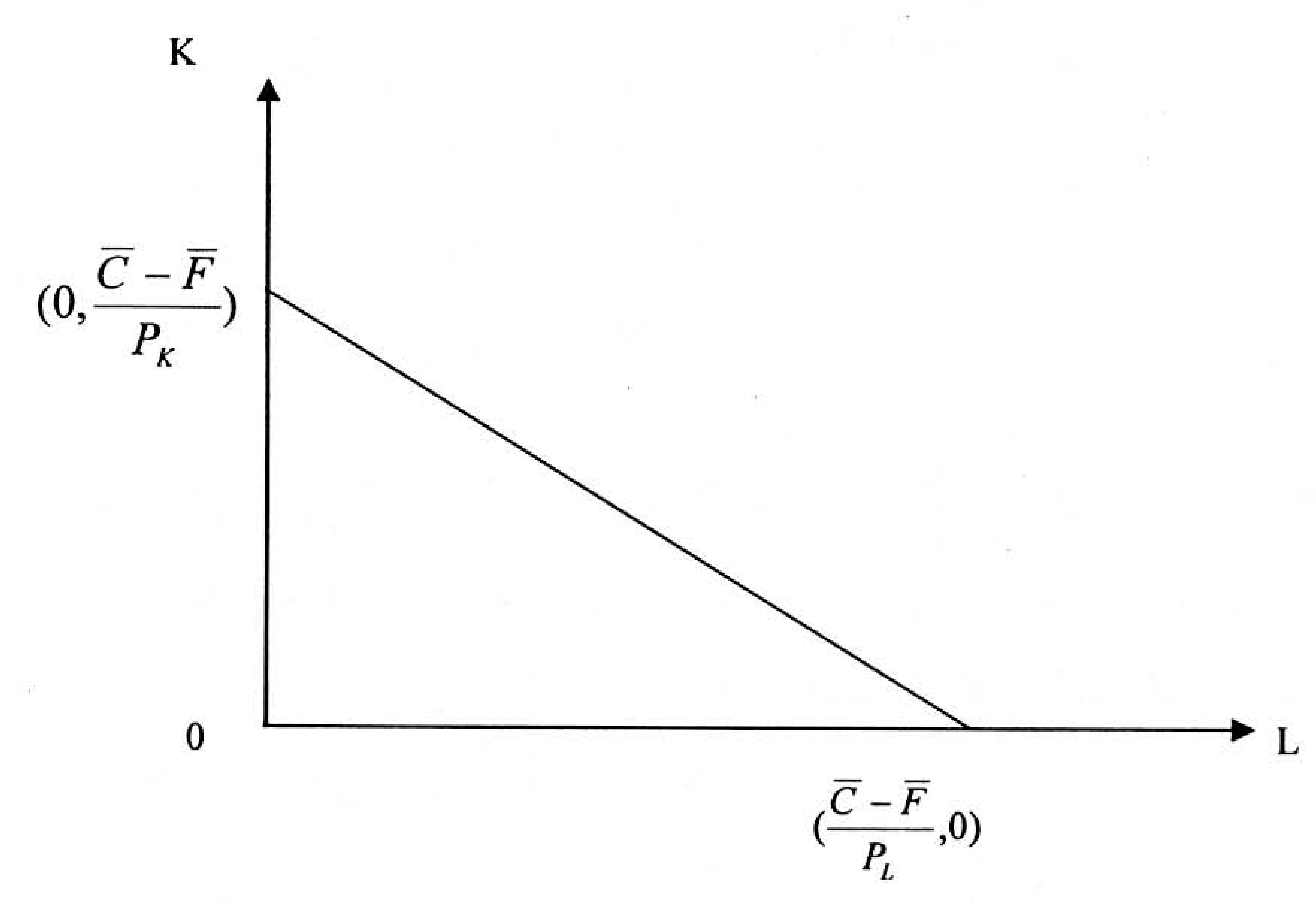
أما إذا فرضنا إنفاق كل الموارد على عنصر العمل فإن نقطة تقاطع خط التكاليف المتساوية مع المحور الأفقي ( محور كميات عنصر العمل ) هي:

$$(\frac{\overline{C}-\overline{F}}{P_K},0)$$

أما ميل خط التكاليف المتساوية فإنه

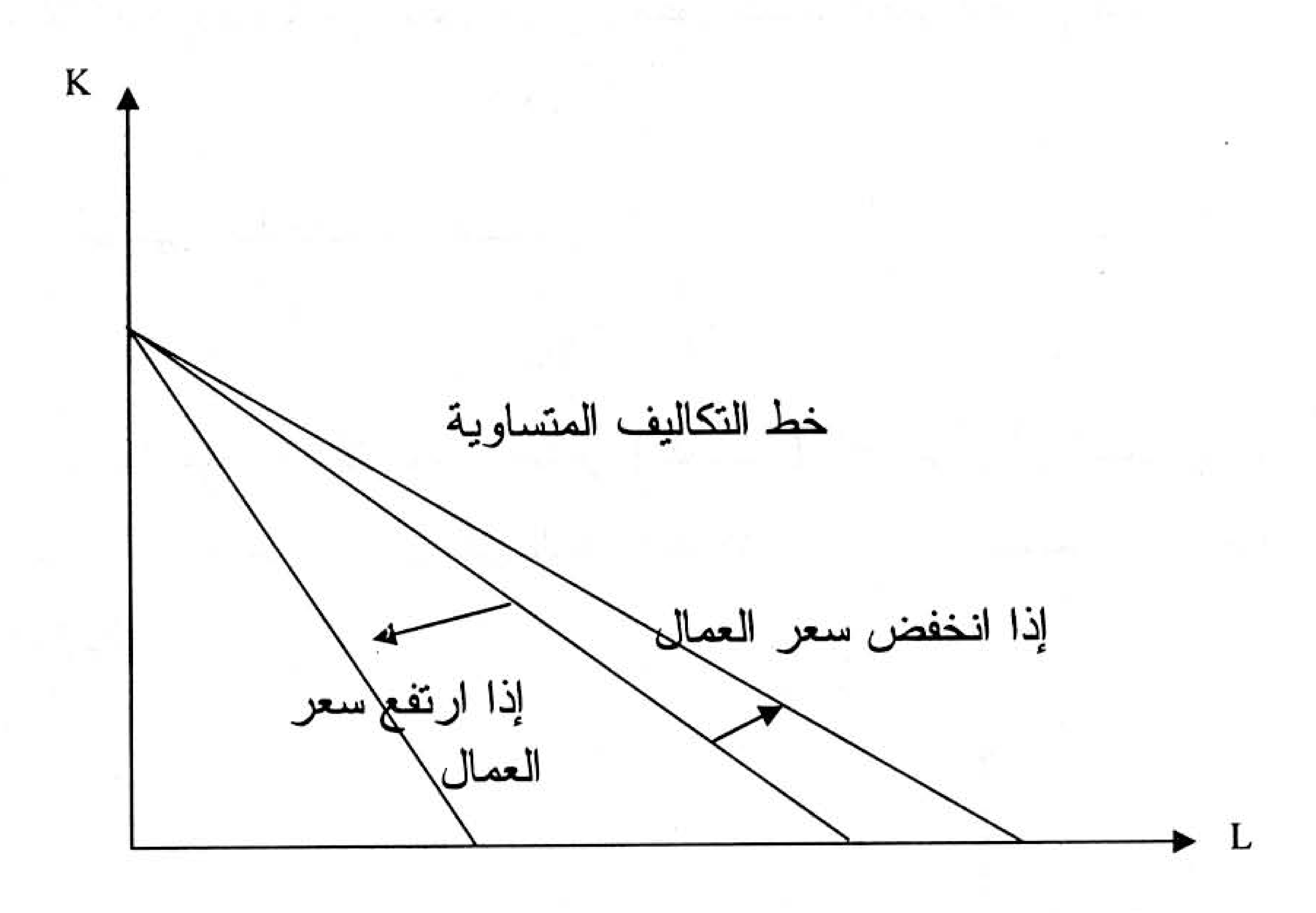
$$\frac{dK}{d_1}=-\frac{P_1}{P_K}$$

وهذا يعني أنه لإستخدام مقادير ( كميات ) أكبر من رأس المال يجب التخلي عن قسم من العمال وفي الشكل رقم IV . 6 نبين خط التكاليف المتساوية.




**الشكل IV . 6**

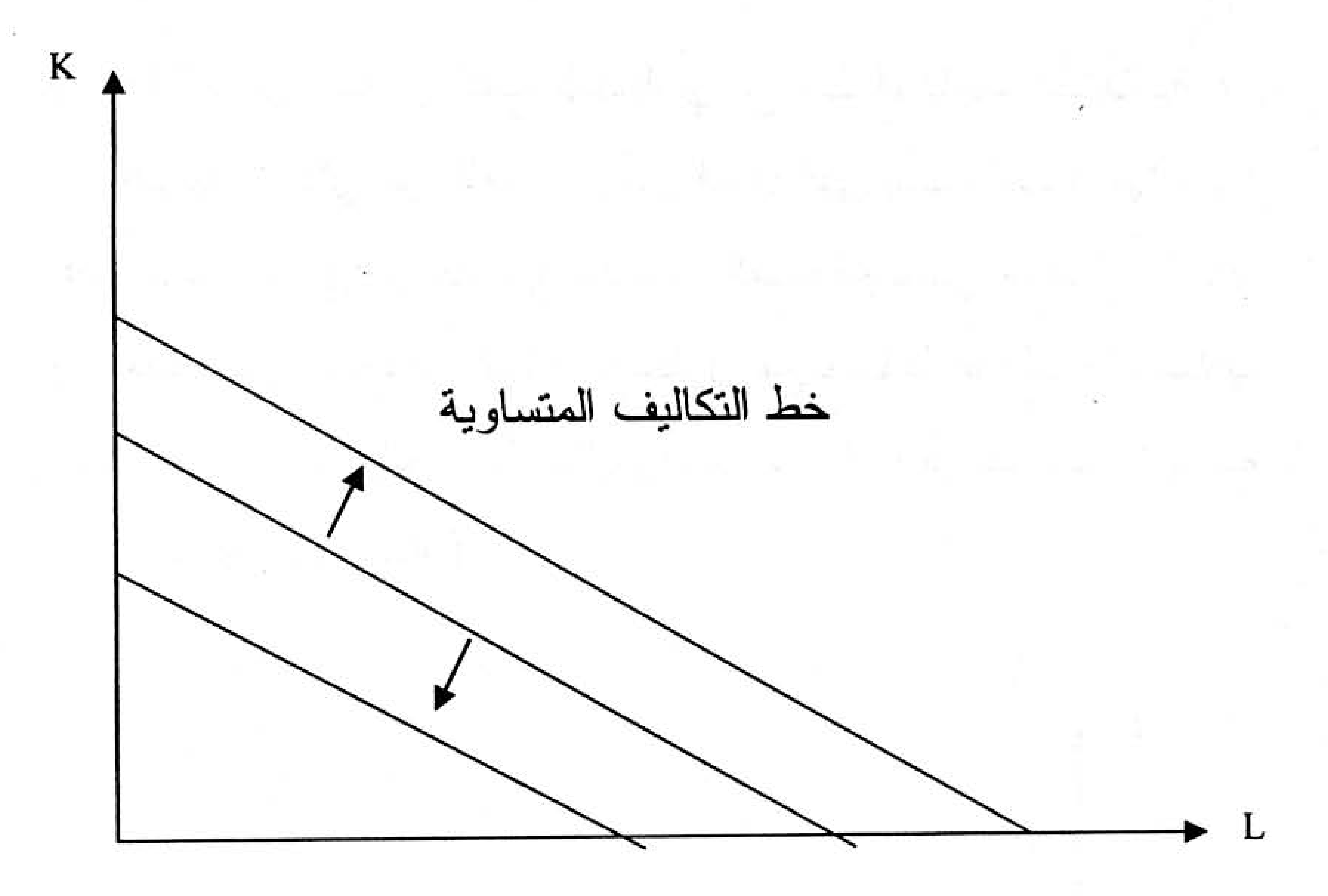
نفرض الآن أنه حدث تغير في سعر من أسعار عوامل الإنتاج مـــاذا يحدث لخط التكاليف المتساوية ؟ للإجابة على ذلك، نفرض أن سعر العمل قد تغير بالنقصان ومرة أخرى بالزيادة ثم نبين أثر التغير في السعر على خــط التكاليف المتساوية في الشكل رقم IV . 7.




**الشكل IV . 7**

أن ما يحدث بالنسبة للعمل قد يحدث بالنسبة لرأس المال ويؤثر ذلــك على خط التكاليف المتساوية نفرض الآن أن حجم الموارد تغير في حين لــم يتغير بسعر كل من عاملي الإنتاج فماذا يحدث لخط التكاليف المتساوية ؟

سنبين ذلك على الشكل رقم IV . 8



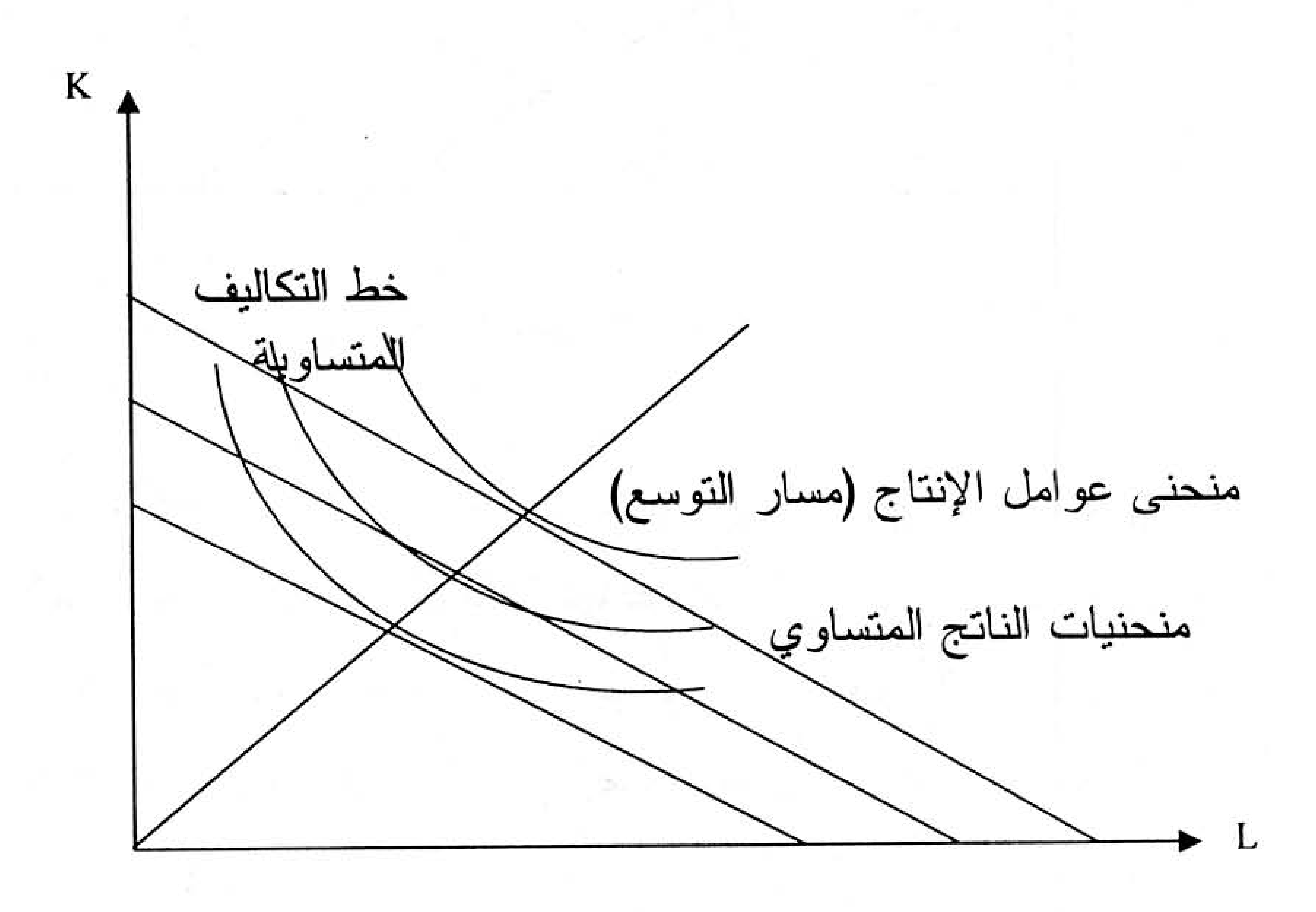

**الشكل IV . 8**

إذا ارتفع حجم الموارد المخصصة للإنفاق على عوامل الإنتاج في حين تبقى أسعار هذه العوامل ثابتة سيؤدي ذلك إلى رفع خط التكاليف المتساوية بالتوازي مع وضعه السابق في حالة زيادة حجم الموارد، وينخفض خط التكاليف المتساوية بالتوازي مع وضعه السابق في حالة انخفاض حجم الموارد.

## II ـ <u>السلوك الأمثل ( السلوك الرشيد ) للمنتج:</u>

نقصر دراستنا هنا على حالة منتج يشترى عاملين من عوامل الإنتاج، هما العمل ورأس المال بأسعار ثابتة من سوق تسودها المنافسة الكاملة (المنافسة التامة ).

إن نقطة تماس منحنى الناتج المتساوي مع خط التكاليف المتساوية هي التي تحدد التوليفة المثلى من العمل ورأس المال التي يجب إستخدامها من أجل تحقيق أقصى إنتاج في حدود الإمكانيات المتاحة ويسمى المستقيم الذي يصل بين نقاط تماس منحنيات الناتج المتساوى مع خطوط التكاليف المتساوية بمنحنى عوامل الإنتاج ( أنظر الشكل رقم VI . 9 ) أو بمسار توسع المشروع ( توسع المؤسسة ).




**الشكل IV . 9**

لكي يكون سلوك المنتج رشيد يجب أن يتبع أحد الأساليب التالية:

1 ـ الأسلوب الأول: إنتاج أكبر كمية ممكنة عند مستوى محدد وثابت من التكاليف الكلية ويمكن حل هذه المشكلة باستخدام طريقة لاقرانج. لـيكن تابع الهدف:

$$V = f(K,L) + \lambda(\overline{C} - LP_1 - KP_K - \overline{F})MAX$$

حيث $\lambda \neq 0$

وتتخلص المشكلة في إيجاد النهاية العظمى للإنتاج، ولقد استخدمنا طريقة لاقرانج سابقا بالنسبة لتعظيم منافع المستهلك في ظل ميزانيته.

الشرط اللازم للحصول على نهاية عظمي للتابع الهدفي: v ( الشـرط اللازم للتوازن ):

هو إيجاد نقطة إستقرار وذلك بحساب المشتقات الجزئية الأولى لتـابع الهدف بالنسبة للمتغيرات الثلاثة $\lambda, K, 1$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\upsilon V}{\upsilon L} &= f_L - \lambda P_L = 0 \\ \frac{\upsilon V}{\upsilon K} &= f_K - \lambda P_K = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{f_L}{P_L} = \frac{f_K}{P_K}$$

$$\frac{\upsilon V}{\upsilon \lambda} = \overline{C} - KP_K - LP_1 - \overline{F} = 0$$

وبالتالي فإن الشرط اللازم للتوازن هو أن تكون النسبة بين الإنتاجيات الحدية للعمل ورأس المال متساوية للنسبة بين أسعارهما $\frac{f_L}{F_K} = \frac{P_L}{P_K}$

وبما أننا وجدنا سابقا أن: $RTS = \frac{f_L}{F_K}$

فإنه يمكن كتابة $RTS = \frac{f_L}{F_K} = \frac{P_L}{P_K}$

أي أن الشرط اللازم للتوازن هو أن يساوى معدل الإحلال الفني بـــين عاملي إنتاج النسبة بين أسعارهما.

**ـ الشرط الكافي للحصول على نهاية عظمى لتابع الهدف V**

**( الشرط الكافي للتوازن )**

الشرط الكافي لتوازن المنتج هو أن يكون المحدد التالي موجبا

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{1K} & -P_1 \\ f_{K1} & f_{KK} & -P_K \\ -P_1 & -P_K & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وبفك المحدد يجب أن يكون $2P_1P_Kf_{1K} - P_K^2f_{11} - P_1^2f_{KK} > 0$

ويعني هذا الشرط أن معدل تغير ميل المماس لمنحنى الناتج المتساوي يجب أن يكون موجبا $\frac{d^2K}{d_1^2} > 0$ عند نقطة التماس مع خط التكلفة المتساوية.

ويعني هذا يجب أن يكون منحنى الناتج المتساوي مقعرا إلى أعلى.

<u>**ملاحظة:**</u>

1 ـ إذا كانت المتباينة $2P_1P_Kf_{1K} - P_K^2f_{11} - P_1^2f_{KK} > 0$

يكون $\frac{d^2K}{d_1^2} > 0$ ويكون منحنى الناتج المتساوي مقعرا إلى أعلى.

2 ـ إذا كانت المتباينة $2P_1P_Kf_{1K} - P_K^2f_{11} - P_1^2f_{KK} < 0$

يكون $\frac{d^2K}{d_1^2} < 0$ ويكون منحنى الناتج المتساوي محدبا إلى أعلى.

3 ـ إذا كانت المعادلة $2P_1P_Kf_{1K} - P_K^2f_{11} - P_1^2f_{KK} = 0$

يكون $\frac{d^2K}{d_1^2} = 0$ ويكون منحنى الناتج المتساوي خطا مستقيما.

**مثال**: إذا كانت دالة الإنتاج هي: $Q = L . K$

والمـــوارد المخصصـــة للإنفـــاق علـــى المســـتخدمات هـــي:

$$\bar{C} = 100\,L + 1000\,K = 10000$$

نريد جعل الإنتاج أكبر ما يمكن، ولحل هذه المشــكلة نتبــع طريقــة مضاعف لاقرانج

$$V = f(1,K) + \lambda(\bar{C} - LP_1 - KP_K)$$
$$V = L.K + \lambda(10000 - 100L - 1000K)MAX$$

الشرط اللازم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\upsilon V}{\upsilon L} = K - 100\lambda = 0 \\ \frac{\upsilon V}{\upsilon K} = L - 1000\lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{K}{100} = \frac{L}{1000} \Rightarrow L = 10K$$

$$\frac{\upsilon V}{\upsilon \lambda} = 10000 - 100L - 1000K = 0$$

نعوض عن L في المعادلة الأخيرة

$$10000 - 100(10K) - 1000K = 0 \Rightarrow K = 5$$

إذن

$$L = 10K = 10{,}5 = 50$$

الشرط الكافي:

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{1K} & -P_1 \\ f_{K1} & f_{KK} & -P_K \\ -P_1 & -P_K & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -100 \\ 1 & 0 & -1000 \\ -100 & -1000 & 0 \end{vmatrix} = 200000 \rangle 0$$

إذن التوليفة $(L,K) = (50,5)$ هي التي تعطى أكبر كمية من الإنتاج في ظل الموارد المنفقة على المستخدمات $\bar{C} = 100L + 1000K = 10000$

2 ـ الأسلوب الثاني: إنتاج كمية محددة وثابتة بأقل تكلفة

هو أن ينتج كمية محددة ثابتة من الإنتاج بأقل تكلفة، أي يقوم المنتج في هذه الحالة بتحديد القيمة الصغرى للتكلفة $C = LP_1 + KP_K + \overline{F}$ اللازمة لإنتاج كمية محددة ثابتة من الإنتاج $\overline{Q}$ ، ويمكن حل هذه المشكلة بطريقة مضاعف لاقرانج حيث يكون تابع الهدف هو:

$$V = LP_L + KP_K + \overline{F} + \lambda\left[\overline{Q} - f(L,K)\right]$$ ( تدنية MIN )

حيث $\lambda \rangle 0$.

الشرط اللازم: في هذا الشرط يتم البحث على نقطة استقرار وذلك عن طريق الإشتقاق الجزئي لدالة الهدف شرط التوازن

$$\left.\begin{aligned} \frac{\upsilon V}{\upsilon L} &= P_L - \lambda f_1 = 0 \\ \frac{\upsilon V}{\upsilon K} &= P_K - \lambda f_K = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{FL}{PL} = \frac{FK}{PK}$$

$$\frac{\upsilon V}{\upsilon \lambda} = \overline{Q} - f(L,K) = 0$$

يمكننا حساب كمية المستخدمات بالتعويض عن L أو K في المعادلة الأخيرة.

الشرط الكافي: إن الشرط الكافي للنهاية الصغري هو أن يكون المحدد التالي سالبا

$$\begin{vmatrix} \lambda f_{LL} & -\lambda \mathrm{f}_{1K} & -\mathrm{f}_L \\ \lambda f_{K1} & -\lambda \mathrm{f}_{KK} & -\mathrm{f}_K \\ -f_1 & -\mathrm{f}_K & 0 \end{vmatrix} \langle 0$$

وبفك المحدد يجب أن يكون

$$-2\lambda f_1\, \mathrm{f}_K\, \mathrm{f}_{1K} + \lambda f_K^2\, \mathrm{f}_{UL} + \lambda f_1^2 f_{KK} \langle 0$$

فإذا استخدمنا الشرط اللازم نجد

$$-2\lambda \frac{P_L P_K}{\lambda 2} f_{1K} + \lambda \frac{P_K^2}{\lambda 2} f_{11} + \lambda \frac{P_L^2}{\lambda 2} f_{KK} \rangle 0$$

وبضرب الطرفين في $(-\lambda)$ نجد

$$2P_L P_K f_{K1} - P_K^2 f_{11} - P_L^2 f_{KK} \rangle 0$$

وهو نفس الشرط الكافي للحصول على أكبر إنتاج ممكـــن فـــي ظـــل مستوى معين ثابت من التكاليف، ويشير كذلك إلى أن منحنى الناتج المتساوي يجب أن يكون مقعرا إلى أعلى حتى نحصل على نهاية صـــغرى للتكلفـــة، والجدير بالذكر هنا أن نبين أن المنتج الرشيد لن يستخدم عوامل الإنتـــاج إلا بالنسبة التي يحددها مسار توسع المؤسسة إذ أن هذه النســـب تعتبـــر نســـبيا مثلى.

**مثال:**

إذا كانت معادلة منحنى الناتج المتســـاوي K .L = 250 فـــالمطلوب تحديد التوليفة ( الثنائية ) المثلى الواجب إستخدامها حتى تكون دالة التكاليف C = 100 L + 1000 K أقل ما يمكن.

تابع الهدف هو: $V = 100L + 1000K - \lambda(K.L - 250)MIN$

الشرط اللازم: الحصول على نقطة استقرار.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\upsilon V}{\upsilon L} &= 100 - \lambda K = 0 \\ \frac{\upsilon V}{\upsilon K} &= 1000 - \lambda L = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{100}{K} = \frac{1000}{L}$$

إذن l = 10 K

$$\frac{\upsilon V}{\upsilon \lambda} = K.L + 250 = 0$$

بالتعويض عن L في المعادلة الأخيرة نحصل على

$$-K(10K)+250=0 \Rightarrow 10K^2=250 \Rightarrow K^2=25$$

إذن $|K=5|$

فأما K = - 5 وهو حل غير اقتصادي

أو K = 5 وهو الحل الإقتصادي ومنه L = 10 K = 10.5 = 50

$$\lambda=\frac{100}{K}=\frac{100}{5}=20$$

إذن الثنائية المثلى الواجب استخدامها حتى تكون دالة التكـــاليف أقـــل ما يمكن هي: $(L, K) = (50,5)$

الشرط الكافي:

$$\begin{vmatrix} -\lambda f_{LL} & -\lambda f_{1K} & -f_L \\ -\lambda f_{K1} & -\lambda f_{KK} & -f_K \\ -f_1 & -f_K & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V_{11} & V_{12} & -f_L \\ V_{21} & V_{22} & -f_K \\ -L & -f_K & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -K \\ -\lambda & 0 & -L \\ -K & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\lambda LK$$

$$-2\lambda LK=-2(20).(50).(5)=-10000\langle 0$$

3 ــ الأسلوب الثالث: تحقيق أقصى ربح ممكن

يعرف الربح على أنه الفرق بين الإيرادات والتكـــاليف $\Pi = R - C$

حيث تمثل الإيرادات عدد الوحدات المباعة مضروبة فـــي ســـعر الوحـــدة المباعة.

$R = P.F(1,K)$ على أساس كل ما ينتج يباع.

وتمثل التكاليف $C = L.P_1 + K_{PK}$ ما يتحمله المنتج في سبيل الإنتاج

$$\Pi = P.f(1,K) - (1.P_1 + K_{PK})$$
$$\Pi = P.f = P.f - LP_1 - KP_K$$

نلاحظ من معادلة الربح أنها عبارة عن تابع لمتغيـــرين همـــا العمـــل ورأس المال، ويمكن تحديد النهاية العظمى لهذا التابع وذلك بإشتقاقه جزئيـــا بالنسبة للمتغيرين العمل ورأس المال.

الشرط اللازم: البحث عن نقطة إستقرار

$$\frac{\upsilon\pi}{\upsilon L} = Pf_1 - P_1 = 0 \Rightarrow Pf_L = P_1$$

$$\frac{\upsilon\pi}{\upsilon K} = Pf_K - P_K = 0 \Rightarrow Pf_K = P_K$$

من الشرط اللازم نستنتج أنه لكي يعظم المنتج ربحه يجب أن يستخدم كل عنصر من عناصر الإنتاج عند المستوى الذي تساوي عنده قيمة الإنتاجية الحدية للعنصر مع سعر خدمة هذا العنصر.

الشرط الكافي:

يجب أن تكون المحددات ( المصغرات ) الرئيسية للمحدد التالي متبادلة الإشارة مبتدئة بالإشارة السالبة.

$$\begin{vmatrix} \partial^2\pi/\partial L^2 & \partial^2\pi/\partial L\upsilon K \\ \partial^2\pi/\partial K\upsilon L & \partial^2\pi/\partial K^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Pf_{11} & \mathrm{Pf}_{1K} \\ Pf_{K1} & \mathrm{Pf}_{KK} \end{vmatrix}$$

ارجع إلى النهايات الصغرى والعظمى للدوال متعددة المتغيرات لما تكون النهاية غير مشروطة.

**III ــ العلاقة بين الإنتاج الحدي والإنتاج المتوسط وقوانين الغلة:**

العلاقة بين الإنتاج الحدي والإنتاج المتوسط تظهر في مرونة الإنتاج بالنسبة لعامل من عوامل الإنتاج.

مرونة الإنتاج لعامل من عوامل الإنتاج = الإنتاج الحدي ÷ الإنتاج المتوسط.

ونلاحظ ما يلي:

أ) إذا كانت مرونة الإنتاج أكبر من الواحد فإن الإنتاج الحدى أكبر من الإنتاج المتوسط ويخضع الإنتاج إلى تزايد الغلة.

ب) إذا كانت مرونة الإنتاج مساوية للواحد فإن الإنتاج الحدي يساوي الإنتاج المتوسط ويخضع الإنتاج إلى ثبات الغلة.

ج) إذا كانت مرونة الإنتاج أصغر من الواحد فـإن الإنتـاج الحـدي أصغر من الإنتاج المتوسط ويخضع الإنتاج إلى تناقص الغلة.

**تمرين:**

إذا كانت دالة الإنتاج لمنتج ما هي $Q = f(1,K) = 50L^2 - (1,K)^3$

حيث يمثل K , L العمل ورأس المال على التوالي.

1 ــ أحسب الإنتاج الحدي للعمل، وما هو حجم اليد العاملة الذي يعظم دالة الإنتاج.

2 ــ أحسب الإنتاج المتوسط للعمل ومتى تمر دالة الإنتاج المتوسـط للعمل بحدها الأقصى.

3 ــ إذا كانت K = 2 ، و L يأخذ قيما مختلفة تجعل من الإنتاج الحدي للعمل أكبر من الصفر فعين المراحل التي يمر بها الإنتاج.

4 ــ نفرض أن K تأخذ كذلك قيما مختلفة، أحسـب الإنتـاج الحـدي لرأس المال.

5 ــ أحسب معدل الإحلال الفني بين العمل ورأس المال

6 ــ إذا كانت الموارد المخصصة للإنفاق علـى المسـتخدمات مـن عوامل الإنتاج $RTS_{1K}$ العمل ورأس المال هي C عين الثنائية المثلى مـن

العمل ورأس المال التي تجعل سلوك المنــتج رشــيدا إذا علمــت أن

$$\overline{C} = \frac{160}{3} = 51 + 2K$$

**الجواب:**

لدينا $Q = f(1, K) = 50L^2 - (1K)^3$

1 ـــ حساب الإنتاج الحدي للعمل $MP_1 = \frac{\delta Q}{\delta L} 1001 - 3L^2 K^3$

لحساب حجم اليد العاملة الذي يعظم دالة الإنتاج نبحــث عــن نقطــة إستقرار وذلك بمساواة دالة الإنتاج الحدى بالصفر.

الشرط اللازم: البحث عن نقطة استقرار

$$\frac{\delta Q}{\delta 1} 100L - 31^2 K^3 = 0$$

$$L = \frac{100}{3K^3}$$

الشرط الكافي: هو أن يكون المشتق الثاني أصغر من الصفر

$$\frac{\delta^2 Q}{\delta L^2} = 100 - 6_L K^3$$

بالتعويض عن $L = \frac{100}{3K^3}$ في المشتق الثاني نجد:

$$\frac{\partial^2 Q}{Q\ L^2} = 100 - 6\left(\frac{100}{3\text{K}^3}\right)K^3 = 100 - 200 = -100 < 0$$

إذن حجم اليد العاملة الذي يجعل دالة الإنتاج عظمى هو:

$$L = \frac{100}{3K^3}$$

## 2 ـ حساب الإنتاج المتوسط للعمل

$$AP_1 = \frac{Q}{L} = 50 \quad 1 - L^2 K^3$$

لمعرفة حجم اليد العاملة الذي يجعل من تابع الإنتاج المتوسط أعظمي فإنه نبحث عن نقطة استقرار أولا، ثم نتأكد من أن هذا الحجم هو الذي يحقق للتابع نهاية عظمى.

الشرط اللازم:

نبحث عن نقطة استقرار

$$\frac{\partial(\frac{Q}{L})}{\partial L} = 50 - 2LK^3 = 0$$

إذن

$$L = \frac{50}{2K^3}$$

الشرط الكافي:

$$\frac{\delta(\frac{2Q}{1})}{\delta 1^2} = -2K^3$$

وبما أن $K \rangle 0$ فإن $-2K^3 \langle 0$ إذن

عند $L = \frac{50}{2K^3}$ فإن دالة الإنتاج المتوسط للعمل تمر بحدها الأقصى.

3 ـ إذا كانت $K = 2$، $L$ تأخذ قيما مختلفة تجعل من الإنتاج الحدي أكبر من الصفر أي $100L - 3L^2K^3 \rangle 0$.

وبالتالي $L \langle \frac{100}{3K^3}$.

وبما أن K = 2 فإن L يجب ألا تتعــدى القيمــة التاليــة $L\langle\frac{100}{24}$ أي $L\langle 4,15$ كما أن $L \neq 0$ لأنه إذا كانت $L = 0$ فإنه لا يوجد إنتاج (أنظر تــابع دالة الإنتاج).

لتعيين مراحل الإنتاج يجب أن نحسب مرونة الإنتاج عندما $0\langle L\langle\frac{100}{24}$

مرونة الإنتاج للعمل = الإنتاج الحدي ÷ الإنتاج المتوسط

$$E_1 = \frac{MP_1}{AP_1} = \frac{1001 - 31^2 K^3}{501 - 1^2 K^3}$$

وحيث K = 2 فإن $E_1 = \frac{1001 - 24L^2}{501 - 8L^2} = \frac{100 - 24L}{50 - 81}$

عندما L = 1 فإن: $E_1 = \frac{100 - (24)(1)}{50 - (8)(1)} = \frac{76}{42}\rangle 1$

مرحلة تزايد الغلة

عندما L = 2 فإن: $E_1 = \frac{52}{34}\rangle 1$

مرحلة تزايد الغلة

عندما L = 3 فإن: $E_1 = \frac{28}{26}\rangle 1$

مرحلة تزايد الغلة

عندما $L = \frac{50}{16}$ فإن

$$E_1 = \frac{100 - 24(\frac{50}{16})}{50 - 8(\frac{50}{16})}$$

$$E_1 = \frac{100 - 75}{50 - 25} = 1$$

مرحلة تباث الغلة

عندما $L=4$ فإن : 1) $E_1 = \frac{4}{18}$

مرحلة تناقص الغلة

عندما $L = \frac{100}{24}$ فإن $E_1 = 0$

مرحلة تناقص الغلة

4 ــ نفرض K تأخذ قيما مختلفة

الإنتاج الحدى لرأس المال هو: $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = -3L^3K^2$

5 ــ معدل الإحلال الفني بين العمل ورأس المال:

$$RTS_{1K} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{100L - 3L^2K^3}{3L^3K^2} = \frac{100 - 3LK^3}{3L^2K^2}$$

6 ــ لدينا $\overline{C} = \frac{160}{3} = 5L + 2K$

لحساب الثنائية المثلي التي تجعل من المنتج يسلك سلوكا رشيدا نقـــوم بما يلي:

أولا: نحدد تابع الهدف ونعظمه، أي ينتج أكبر كمية ممكنة عند مستوى محدد وثابت من التكاليف $V = f(1,K) + \lambda(\overline{C} - P_1 \quad 1 - P_K K)MAX$

وحيث $\lambda \neq 0$

$$V = 50L^2 - (1K)^3 + \lambda(\frac{160}{3} - 51 - 2K)MAX$$

حيث $\lambda \neq 0$.

ثانيا: الشرط اللازم: البحث عن نقطة استقرار.

$$\frac{\partial V}{\partial L}=100L-3L^2K^3-5\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{100L-3L^2K^3}{5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial K}=-3L^3K^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{-3L^3K^2}{2}$$

$$\lambda=\frac{100L-3L^2K^3}{5}=\frac{-3L^3K^2}{2}$$

$$200L-63L^2K^3=-15L^3K^2$$

$$K=\frac{200+15L^2}{6L}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=\frac{160}{3}-5L-2K=0$$

بالتعويض عن K في $\frac{\partial V}{\partial \lambda}$ نجد

$$\frac{160}{3}-5L-2.(\frac{200+15L^2}{6L})=0$$

$$30L^2-160L+200=(10L-20)(3L-10)=0$$

إما $10L-20=0$ وبالتالي $L=2$

أو $3L-10=0$ وبالتالي $L=\frac{10}{3}$

بالتعويض عن قيمة 1 في K الذي وجدناها سابقا نجد

عندما $L=2$ فإن $K=\frac{200+15L^2}{6L}=\frac{200+15(2)^2}{6(2)}=\frac{260}{12}=\frac{65}{3}$

عندما $L=\frac{10}{3}$ فإن $K=\frac{55}{3}$

ثالثا: الشرط الكافي:

تكون المصفوفة الهيسية H ويكون هذا المحدد أكبر من الصفر

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{1K} & -P_L \\ f_{KK} & f_{KK} & -P_K \\ -P_1 & -P_K & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (100-6LK^3) & -9L^2K^2 & -5 \\ -9L^2K^2 & -6L^3K & -2 \\ -5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

لكي يكون لتابع الإنتاج نهاية عظمى مشروطة يجب أن تتحقق المتباينة التالية الناتجة عن فك المحدد $2P_1P_Kf_{1K} - P_K^2f_{11} - P_1^2f_{KK} \rangle 0$

أي يجب أن تكون:

$2(5)(2) - (9L^2K^2) - 4(100-6LK^3) - 25(6L^3K)$ أكبر من الصفر

عندما $L = 2$, $K = \frac{65}{3}$ فإن

$$-180(2)^2(\frac{65}{3})^2 - 400 + 24(2)(\frac{65}{3})^3 + 150(2)^3(\frac{65}{3}) = 175822{,}22 \rangle 0$$

وبالتالي تحقق الثنائية $(L, K) = (2, \frac{65}{8})$ من المستخدمات توازن المنتج وذلك بتحقيق أكبر كمية من الإنتاج ممكنة عند مستوى محدد وثابت من التكاليف $\frac{160}{3} = 5L + 2K$

عندما $L = \frac{10}{3}$, $K = \frac{55}{3}$ فإن

$$-180(\frac{10}{3})^2(\frac{55}{3})^2 - 400 + 24(\frac{10}{3})(\frac{55}{3})^3 + 150(\frac{10}{3})^3(\frac{55}{3}) = -77807{,}41 \langle 0$$

وهذه الثنائية $(L, K) = (\frac{10}{3}, \frac{55}{3})$ لا تجعل من المنتج رشيدا.

**مرونـة الإنتاج بالنسبة لعاملي الإنتاج معا:**

لقد ذكرنا أنه بإمكان المنتج تغيير جميع عوامل الإنتـاج فـي الفتـرة الطويلة، ولمعرفة آثار هذا التغير على غلة الحجم نقوم بما يلي:

أ ـ نفرض مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل هـي $\alpha$ ومرونـة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال هي $\beta$

ب ـ إذا كانت $\alpha + \beta \langle 1$ فإن الإنتاج يمر بتناقص غلة الحجم.

ج ـ إذا كانت $\alpha + \beta = 1$ فإن الإنتاج يمر بثبات غلة الحجم.

د ـ إذا كانت $\alpha + \beta \rangle 1$ فإن الإنتاج يمر بتزايد غلة الحجم.

**مثال:**

إذا كانت دالة الإنتاج من الصيغة: $Q = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}}$

حيث يمثل K عنصر رأس المال ويمثل L عنصر العمل وحجم التكلفة C= 2000 دينار وسعر وحدة العمل يساوي 10 دينار وسعر وحدة رأس المال يساوي 20 دينار.

**المطلوب:**

1 ـ أحسب الإنتاج المتوسط لكل من عنصر العمل وعنصر رأس المال.

2 ـ أحسب الإنتاج الحدي لكل من عنصر العمل وعنصر رأس المال.

3 ـ أحسب مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل عند مستوى ثابت من رأس المال وما هي مرحلة الغلة التي يمر بها الإنتاج الكلي.

4 ـ أحسب مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر رأس المال عند مسـتوى ثابت من العمل وما هي مرحلة الغلة التي يمر بها الإنتاج الكلي.

5 ـ إذا فرضنا حدوث التغير في كل من العمل ورأس المال، أحسب مرونة الإنتاج الكلي بالنسبة لعنصرى العمل ورأس المال وما هـــي مرحلـــة الغلة التي يمر بها الإنتاج الكلي.

6 ـ أحسب حجم العمل وحجم رأس المال الذي يعظم الإنتاج في ظل قيد التكلفة وأسعار عوامل الإنتاج.

**<u>الحل</u>:**

لدينا دالة الإنتاج من الصيغة $Q = L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}}$

1 ـ حساب الإنتاج المتوسط:

أ ـ الإنتاج المتوسط بالنسبة للعمل: $AP_L = \frac{Q}{L} = \frac{2K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}$

ب ـ الإنتاج المتوسط بالنسبة لرأس المال:

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{2L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}$$

2 ـ حساب الإنتاج الحدي:

أ ـ الإنتاج الحدي بالنسبة للعمل

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{1}{2}} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}}$$

ب ـ الإنتاج الحدي بالنسبة لرأس المال:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} = \frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}$$

3 ـ مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل عند مستوى ثابت من رأس المال

$$E_L = \frac{MP_L}{AP_L} = \frac{K^{\frac{1}{2}} / L^{\frac{1}{2}}}{2K^{\frac{1}{2}} / L^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

تبين المرونة أن الإنتاج الكلي يمر بمرحلة تناقص الغلة نتيجة تغير عنصر العمل عند مستوى ثابت من رأس المال.

4 ـ مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال عند مستوى ثابت من العمل

$$E_K = \frac{MP_K}{AP_K} = \frac{L^{\frac{1}{2}} / K^{\frac{1}{2}}}{2L^{\frac{1}{2}} / K^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

تبين المرونة أن الإنتاج الكلي يمر بمرحلة تناقص الغلة نتيجة تغير عنصر رأس المال عند مستوى ثابت من العمل.

5 ـ نفرض تغير عنصري الإنتاج، العمل ورأس المال، ونحسب مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصري الإنتاج فنجدها:

$$E_{L.K} = E_L + E_K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

تبين مرونة الإنتاج الكلي أنه يمر بمرحلة ثبات الغلة نتيجة تغير عنصري الإنتاج معا.

6 ــ حساب حجم العمل ورأس المال الذي يعظم الإنتاج في ظل قيد التكلفة وأسعار عوامل الإنتاج.

لحساب حجم العمل وحجم رأس المال الذي يعظم الإنتاج الكلي في ظل قيد التكلفة وأسعار عوامل الإنتاج نستخدم مضاعف لاقرانج حيث دالة الهدف الإقتصادية هي:

$$V = f(L,K) + \lambda[C - LP_L - KP_K]MAX$$

$$V = 2L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{2}} + \lambda[2000 - 10L - 20K]MAX$$

حيث عند التوازن يكون تعظيم V هو تعظيم f( L, K )

الشرط اللازم: البحث عن وجود نقطة استقرار ويتم ذلك بحساب المشتقات الجزئية الأولى لدالة الهدف وإعدامها.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial L} &= \frac{K^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}} - 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{K^{\frac{1}{2}} / L^{\frac{1}{2}}}{10} \\ \frac{\partial V}{\partial K} &= \frac{L^{\frac{1}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} - 20\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{L^{\frac{1}{2}} / K^{\frac{1}{2}}}{10} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{K^{\frac{1}{2}} / L^{\frac{1}{2}}}{10} = \frac{L^{\frac{1}{2}} / K^{\frac{1}{2}}}{10}$$

من هذه المعادلة الأخيرة نحصل على L = 2 K

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 2000 - 10L - 20K = 0$$

بالتعويض عن L بما يساويها نجد:

$$2000 - 10(2K) - 20K = 0$$

$$2000 - 40K = 0 \Rightarrow K = 50$$

وبالتالي: $L = 2K = 2(50) = 100$

نستنتج أن حجم العمل يساوي 100 وحدة في حين حجم رأس المال يساوي 50 وحدة.

<u>الشرط الكافي</u>: التأكد من أن قيمتي L و K المحسوبتين يجعلان من حجم الإنتاج أعظمى في ظل قيد التكلفة وأسعار عوامل الإنتاج، وليتم ذلك يجب أن يكون:

$$\begin{vmatrix} V_{LL} & V_{LK} & -P_L \\ V_{KL} & V_{KK} & -P_K \\ -P_L & -P_K & 0 \end{vmatrix} = 2P_L P_K V_{LK} - (P_K)^2 V_{LL} - (P_L)^2 V_{KK} \rangle 0$$

لدينا:

$$V_{LK} = V_{KL} = \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}}$$

$$V_{LL} = -\frac{1}{2} L^{-\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}}$$

$$V_{KK} = -\frac{1}{2} L^{\frac{1}{2}} K^{-\frac{3}{2}}$$

إذن بالتعويض في المحدد الهيسي نجد:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} L^{-\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} & -10 \\ \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{3}{2}} & -20 \\ -10 & -20 & 0 \end{vmatrix} = 200 L^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{1}{2}} 200 L^{-\frac{3}{2}} K^{\frac{1}{2}} + 50 L^{-\frac{1}{2}} K^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{200LK}{L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{3}{2}}} + \frac{200K^2}{L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{3}{2}}} + \frac{50L^2}{L^{\frac{3}{2}} K^{\frac{3}{2}}} \rangle 0$$

وبما أن جميع حدوده موجبة فإن قيمة هذا المحدد أكبر مـــن الصـــفر وهذا محقق عندما تكون $( L, K ) = ( 100 , 50 )$ وبالتالي يكون عند هذه الثنائية من العوامل الإنتاجية الإنتاج أكبر ما يمكن في ظل قيد التكلفة وأسعار عوامل الإنتاج.

<u>ملاحظة:</u>

يمكن للطالب أن يسأل كيف يمكننا تطبيق مرونـــة الإنتـــاج بالنســـبة لعنصر إنتاجي واحد ثم لعنصرين لمعرفة الغلة ونجيب بدورنا على النحـــو التالي:

لقد قلنا سابقا أنه في الفترة القصيرة لا يمكن تغييـــر جميـــع عوامـــل الإنتاج وإنما يمكن تغيير بعضها كالعمل والمواد الأولـــي. إذن فـــي الفتـــرة القصيرة يمكن تغيير العمل والمواد الأولية ولهذا من الأحسن بالنسبة للمنـــتج معرفة أثر التغيير في عنصر العمل على الإنتاج الكلي ثم أثر التغيـــر فـــي المادة الأولية على الإنتاج الكلي.

<u>1 ــ أثر تغير عنصر العمل على الإنتاج الكلي:</u>

يمر الإنتاج الكلي بثلاث مراحل هي:

أ ــ <u>المرحلة الأولي</u>: يكون الإنتاج الكلي في تزايد بزيادات متزايـــدة والإنتاج المتوسط متزايد، والإنتاج الحدى أكبر من الإنتاج المتوسط، وتبـــدأ هذه المرحلة من مركز الإحداثيات إلي نقطة تقاطع الإنتاج المتوســـط مـــع الإنتاج الحدي.

ب ــ <u>المرحلة الثانية</u>: وهي المرحلة الإقتصادية حيث يكون الإنتـــاج الكلي في تزايد بزيادات متناقصة والإنتاج المتوسط متناقص والإنتاج الحدي أقل من الإنتاج المتوسط وتبدأ هذه المرحلة من مركز نقطة تقـــاطع الإنتـــاج

الحدي مع الإنتاج المتوسط إلى غاية بلوغ الإنتاج الكلي أقصى ما يمكن أي عند الإستقرار في الإنتاج الكلي، ويكون الإنتاج الحدي معدوما.

ج ــ المرحلة الثالثة: يكون فيها الإنتاج الكلي متناقصا مقارنة بالزيادات في حجم عنصر العمل والإنتاج الحدي سالبا حيث يعبر عن كون الكفاءة الإنتاجية لعنصر العمل وعنصر رأس المال سالبة.

إذن المراحل التي يتم فيها الإنتاج هي المرحلة الأولى والثانية والمرحلة الإقتصادية هي المرحلة الثانية، لأن المرحلة الأولى تعبر عن تزايد الكفاءة الإنتاجية لعنصر العمل حتى تبلغ أقصاها ( الإنتاج المتوسط في أقصى حد له ) وعدم استخدام عنصر رأس المال الثابت ( الآلات ) استخداما أمثل، أما المرحلة الثانية فإنها تعبر عن استخدام عنصر رأس المال الثابت استخداما فعالا هو كذلك، وهذا يظهره تزايد الإنتاج الكلي بالرغم من تناقص الكفاءة الإنتاجية لعنصر العمل.

كما تظهر المراحل الأولى والثانية العلاقة بين الإنتاج الحدي والإنتاج المتوسط حيث يبدأ الإنتاج الحدي أكبر من الإنتاج المتوسط ( تزايد الغلة ) ثم الإنتاج الحدي يساوي الإنتاج المتوسط ( ثبات الغلة ) ثم الإنتاج الحدي أقل من الإنتاج المتوسط ( تناقص الغلة ) وهذا كله بالنسبة للعنصر المتغير عنصر العمل.

2 ــ أثر تغير المادة الأولية على الإنتاج الكلي:

قد يمكن للمنتج أن ينتج وحدة المنتج بأكثر من طريقة مزج بين المواد كأن يمزج وحدة واحدة من المدخل ( أ ) مع وحدة واحدة من المدخل ( ب ) فيحصل على وحدة منتوج واحدة أو يمزج وحدة واحدة من المدخل ( أ ) مع وحدة واحدة من المدخل ( ج ) فيحصل على وحدتي منتوج، فإذا تم ذلك فيعني أن طريقة المزج الأخيرة أكفء من طريقة المزج الأولى حيث طريقة

المزج الأخيرة تضاعف من الإنتاج إذا كانت الوحدة المعيارية مــن الــزمن للمزج والإنتاج واحدة، أو يزيد الإنتاج الكلي بنسبة معينة إذا كانت الوحــدة المعيارية من الزمن للمزج والإنتاج مختلفة.

3 ــ في الفترة الطويلة يمكن للمنتج تغيير حجم العنصــر الإنتــاجي الثابت بزيادة حجمه ويكون له تبعا لذلك أثر في حجم الإنتاج الكلي، ثم بعــد ذلك يمكننا تطبيق الخطوة ( 1 ) والخطوة ( 2 ) المذكورتين ســابقا حيــث تتكرر الخطوتان عادة من المرحلة القصيرة إلى المرحلة الطويلة بعد تغييــر حجم العنصر الإنتاجي الثابت.

**نتيجة:**

مما سبق ذكره نستنتج ما يلي:

يمكننا معرفة مرحلة الغلة عن طريق مرونة الإنتاج لعنصر إنتــاجي واحد إذا تغير هذا العنصر لوحده، أما إذا تغير العنصران يمكننــا معرفــة مرحلة الغلة بجمع مرونتي الإنتاج بالنسبة للعنصرين.

# الفصل الثاني

# نفقات الإنتاج (تكاليف الإنتاج)

## I ــ نفقات الإنتاج ( تكاليف الإنتاج )

لإنتاج سلعة معينة تقوم المؤسسة المنتجة بالحصول على عوامل الإنتاج مقابل أسعار معينة، حيث تمثل هذه الأسعار تكاليف إنتاجها، وتحدد العلاقة بين تكلفة إنتاج السلعة وسعرها كمية الإنتاج. كما تحدد هذه العلاقة القرارات الخاصة بقيام مشروعات جديدة أو تصفية مشروعات قديمة.

### I ــ الأفق الزمني لقرارات الإنتاج:

يواجه أي مشروع إنتاجي في ظل المنافسة التامة مشكلة إختيار طريقة الإنتاج، ولمواجهة هذه المشكلة يتخذ المنظمون عددا من القرارات منها ما يتعلق بمشاكل الإنتاج اليومية ومنها ما يتعلق بالتوقعات المستقبلية، ويمكننا أن نبين نوعين من القرارات يفرق بينهما الإقتصاديون.

النوع الأول: يتعلق بالبحث عن الوحدات الإنتاجية والآلات والمعدات التي يختارها المنظم للإنتاج.

النوع الثاني: يتعلق بالبحث عن أفضل الطرق إستخداما للطاقات الإنتاجية مما يطلق عليه بالأمثلية.

ويقابل التفرقة بين القرارين الإقتصاديين السابقين تفريق من حيث الأفق الزمني، قرارات تتعلق بالأجل القصير وأخرى بالأجل الطويل ولقد بينا في نظرية العرض معنى الأجل القصير والأجل الطويل.

### 1 ــ دوال التكاليف قصيرة الأجل:

فإذا كانت دالة الإنتاج هي: $Q = f(L, K)$

ومعادلة التكاليف هي $C = P_1 L + P_K^K + \overline{F}$

ودالة مسار التوسع هي $Q = g(L, K)$

يكون لدينا 3 معادلات بأربعة متغيرات هي C, Q, K, L نريد تحديـدها، وبحل هذه المعادلات نحصل على التكلفة الكلية كدالة صريحة في مسـتوى الإنتاج مضافا إليها التكاليف الثابتة $C = h(Q) + \overline{F}$

فإذا كان سلوك المنتج رشيدا فإن هذه الدالة تبين أقل تكلفـة يتحملهـا المنتج في سبيل إنتاج كل حجم من أحجام الإنتاج.

1 ـ 1: كيفية تحديد التكلفة الكلية:

لكي نحدد التكلفة الكلية نتبع ما يلي:

1 ـ نختار نقطة على مجرى التوسع حيث تبين هذه النقطة الكميـات المستخدمة من عوامل الإنتاج التي تحدد مستوى معين من الإنتاج وفقا دالـة الإنتاج.

2 ـ نضرب كميات عوامل الإنتاج في أسعارها الثابتة نحصل علـى التكاليف المتغيرة.

3 ـ بإضافة التكلفة الثابتة إلى التكلفة المتغيرة نحصل علـى التكلفـة الكلية ويمكننا تعريف التكلفة الكلية على أنها كل المدفوعات اللازمة لإنتـاج سلعة معينة $C = h(Q) + \overline{F}$

ونلاحظ من هذه الدالة ثلاث أنواع من التكاليف:

أولا ـ التكاليف الكلية الثابتة:

وهي تكاليف مستقلة عن حجم الإنتاج وبالتالي لا تتغير بتغيـر حجـم الإنتاج وإنما تتحملها المؤسسة المنتجة نتيجة إرتباطها بقدر معين من عوامل الإنتاج، ومن أنواع التكاليف الثابتة الإيجار ـ التأمين ... إلخ، ونرمز لهـا بالرمز FC.

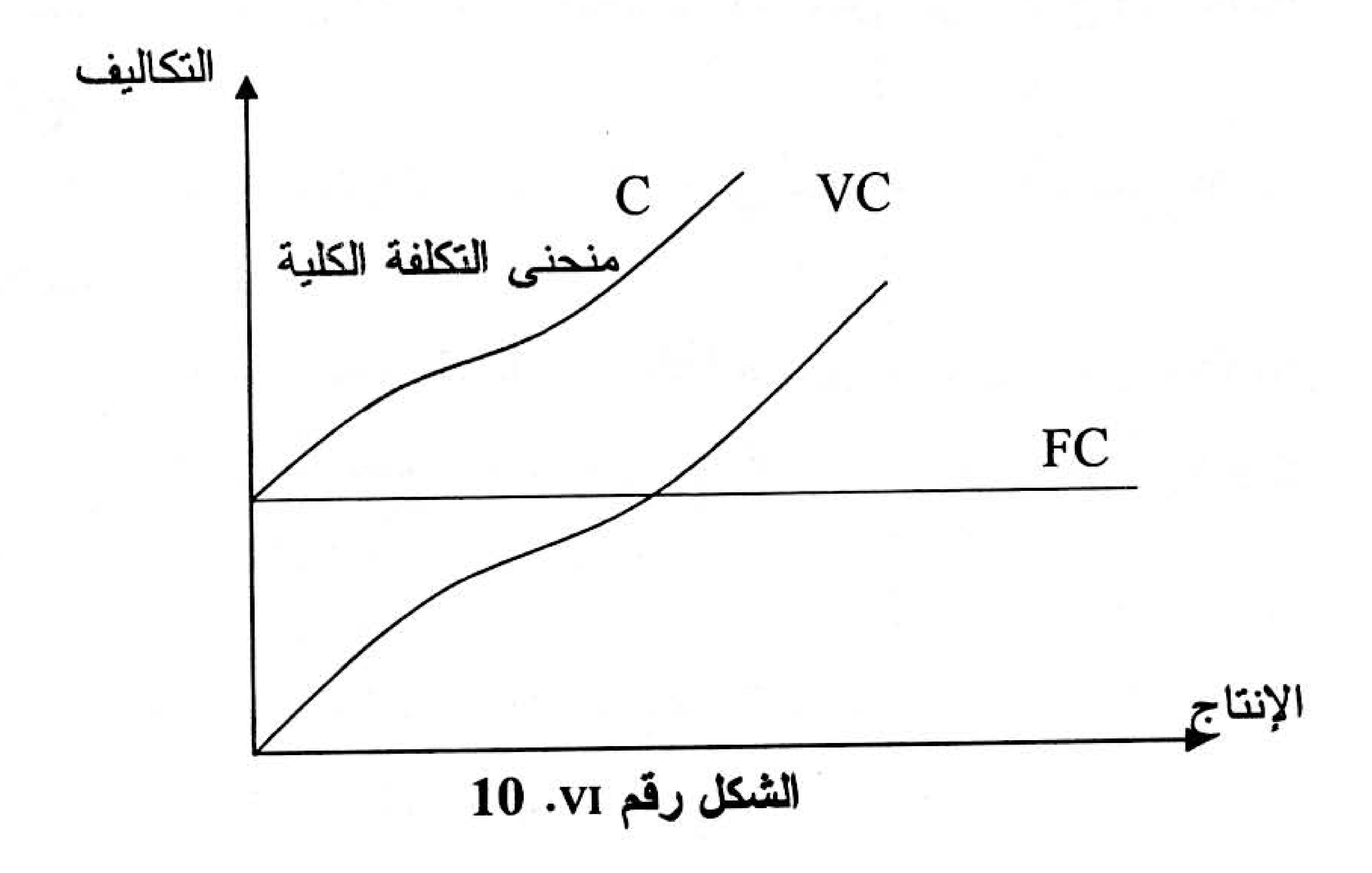
ثانيا: التكاليف الكلية المتغيرة:

وهي تكاليف مرتبطة بحجم الإنتاج إرتباطا مباشرا لا تتحملها المؤسسة إلا إذا أنتجت فعلا، ولذا تزيد التكاليف المتغيرة بزيادة حجم الإنتاج وتــنقص بنقصانه، وتتضمن التكاليف المتغيرة تكاليف عوامل الإنتــاج التــي يمكــن تغييرها في الأجل القصير ونرمز لها بالرمز VC.

ثالثا: التكاليف الكلية الإجمالية:

هي مجموع التكاليف الكلية الثابتة والتكاليف الكلية المتغيرة ونرمز لها بالرمز C.

$$C = VC + FC = h(Q) + \overline{F}$$




**الشكل رقم VI. 10**

نلاحظ من الشكل رقم VI. 10 أن منحنى التكاليف الكلية الإجمالية يقع فوق منحنى التكاليف الكلية المتغيرة وعلى مسافة تساوي مقــدار التكــاليف الكلية الثابتة

1 ـ 2: التكاليف المتوسطة:

يشير هذا النوع من التكاليف إلى ما تكلف كل وحدة من الوحدات المنتجة من التكاليف الثابتة والمتغيرة والكلية الإجمالية ( أنظر الشكل رقم IV. 11 ).

أولا: التكلفة المتوسطة الثابتة: $AFC = \bar{F}/Q$

وتبين هذه التكلفة ما تكلف الوحدة الواحدة المنتجة من تكاليف ثابتة، وبما أن التكاليف الكلية الثابتة لا تتغير بتغير حجم الإنتاج فإن التكلفة المتوسطة الثابتة تنخفض كلما زاد حجم الإنتاج.

ثانيا: التكلفة المتوسطة المتغيرة: $AVC = h(Q))Q$

يشير هذا النوع من التكلفة إلى نصيب الوحدة الواحدة المنتجة من التكلفة المتغيرة، ونلاحظ من خلال العلاقة السابقة أنه:

إذا كان معدل الزيادة في التكلفة الكلية المتغيرة أقل من معدل الزيادة في الكمية المنتجة فإنه في هذه المرحلة تتناقص فيها التكلفة المتوسطة المتغيرة أي أن كل وحدة إضافية من عوامل الإنتاج المتغيرة تضيف إلى الناتج كمية أكبر مما تضيفه الوحدة السابقة لها، أي تكون في مرحلة تزايد الناتج المتوسط.

وإذا كان معدل الزيادة في التكلفة الكلية المتغيرة أكبر من معدل الزيادة في الكمية المنتجة فإنه في هذه المرحلة تتزايد فيها التكلفة المتوسطة المتغيرة، أي أن كل وحدة إضافية من عوامل الإنتاج المتغيرة تضيف إلى الناتج كمية أقل مما تضيفه سابقتها، أي تكون في مرحلة تناقص الناتج المتوسط.

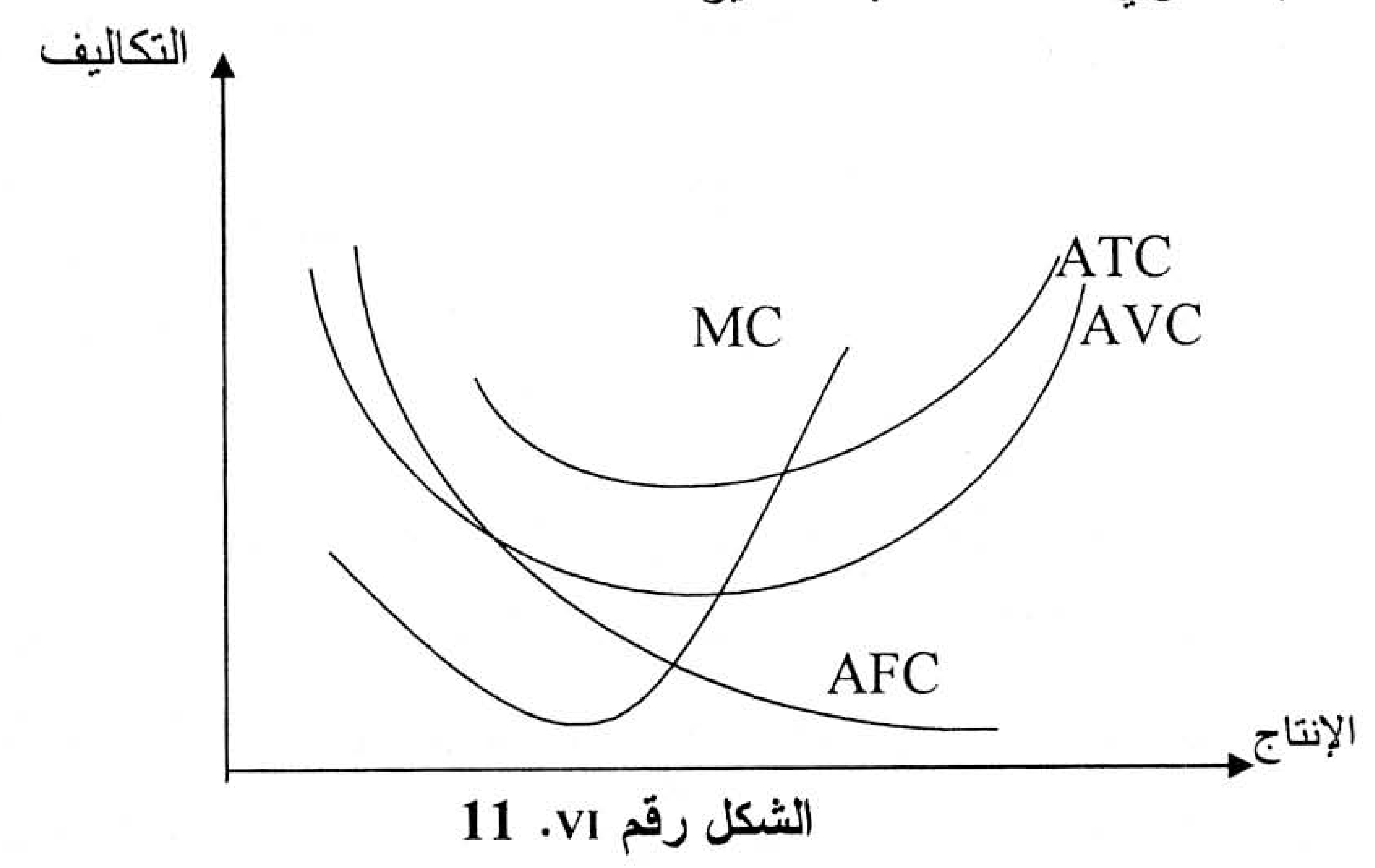
ثالثا: التكلفة المتوسطة الإجمالية: $ATC = \left[h(Q) + \overline{F}\right]/Q$

ويشير هذا النوع من التكلفة إلى نصيب الوحدة الواحدة المنتجة من التكاليف الكلية الإجمالية التي تتحملها المؤسسة.

1 ــ 3: التكلفة الحدية:

$$Mc = \frac{dc}{dQ} = \overline{h}(Q)$$

هي مقدار الزيادة أو النقصان في التكلفة الكلية الإجمالية الناتجة عن الزيادة أو النقصان في حجم الإنتاج، وبوحدة واحدة نلاحظ أن التكلفة الحدية الكلية تساوي التكلفة الحدية المتغيرة.




**الشكل رقم VI. 11**

يمكننا أن نجمل الملاحظات على التكاليف المتوسطة والحدية فيما يلي:

1 ــ تبلغ التكلفة الحدية نهايتها الصغرى عند مستوى الإنتاج أقل من المستوى الذي تبلغ عنده كل من التكلفة الكلية المتوسطة والتكلفة المتغيرة المتوسطة نهايتها الصغرى كما أن التكلفة المتغيرة المتوسطة تبلغ نهايتها الصغرى قبل التكلفة الكلية المتوسطة.

2 ـ تتخذ التكلفة المتوسطة الثابتة شكل القطع الزائد لأنها تتناقص بزيادة حجم الإنتاج.

3 ـ المسافة الرأسية بين التكلفة الكلية المتوسطة والتكلفة المتغيرة المتوسطة تساوي التكلفة الثابتة المتوسطة، وبما أن هذه الأخيرة متناقصة بزيادة حجم الإنتاج فإن المسافة الرأسية متناقصة كذلك بزيادة حجم الإنتاج.

4 ـ يقطع منحنى التكلفة الحدية منحنى التكلفة ( الكلية أو المتغيرة ) المتوسطة عند القيمة الصغرى لهذا الأخير أي عندما MC = ATC أو MC = AVC.

5 ـ إذا كان منحنى التكلفة المتوسطة متناقصا بالنسبة للكميات فإن التكلفة الحدية أصغر من التكلفة الكلية المتوسطة وأصغر من التكلفة المتغيرة المتوسطة.

6 ـ إذا كان منحنى التكلفة المتوسطة متزايدا بالنسبة للكميات فإن التكلفة الحدية أكبر من التكلفة الكلية المتوسطة وأكبر من التكلفة المتغيرة المتوسطة.

## 2 ـ دوال التكاليف طويلة الأجل:

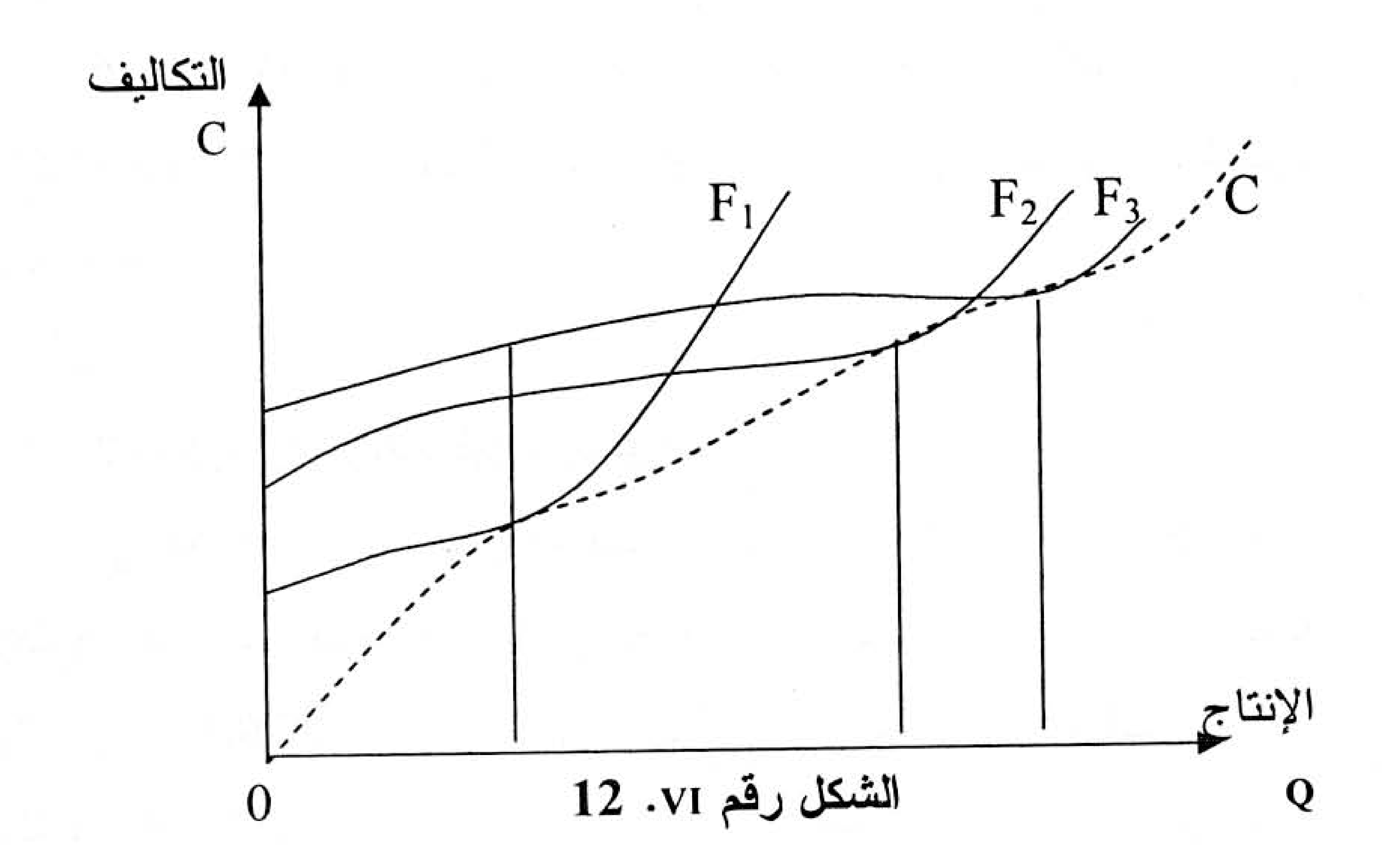
في الفترة الطويلة تتمكن المؤسسة الإنتاجية من تغيير كل عوامل الإنتاج وهذا تبعا لطبيعة العملية الإنتاجية ومدى تخصص المعدات الرأسمالية وبالتالي فإن التكاليف جميعها تكون متغيرة بما في ذلك التكاليف التي كانت ثابتة في الفترة القصيرة إذن تعتبر F متغيرا مستمرا يدخل في كل من دوال الإنتاج $Q = f(L, K, F)$

ومعادلة التكاليف $C = P_1 L + P_K.K + s(F)$

ودالة مجرى التوسع $Q = g(L, K, F)$

وبحل المعادلات الثلاث نحصل على دالة التكاليف في الفترة الطويلـــة في مستوى الإنتاج $C = h(Q, F) + S(F)$

في هذه الدالة الأخيرة إذا اعتبرنا F ثابتة نحصل على دالة التكاليف في الفترة القصيرة ومنه تعبر دالة التكاليف الكلية في الأجل الطويل عـــن أقـــل تكلفة لإنتاج كل مستوى من مستويات الإنتاج التـــابع لحجـــم مـــن أحجـــام المؤسسة، ويبين الشكل رقم IV. 12 التكاليف الكلية المقابلة لـــثلاث أحجـــام ممكنة، وكذلك تمثل التكاليف الحدية في الفترة الطويلة الزيادة في التكـــاليف الكلية التي تحدث بسبب الإنتقال من حجم إنتاجي إلى حجم إنتـــاجي أكبـــر باستخدام التوفيق الأمثل قبل وبعد التغيير.




**الشكل رقم VI. 12**

نلاحظ في هذا الشكل أن التكلفة الكلية الطويلة الأجـــل هـــي المحـــل الهندسي لنقط أقل تكلفة عندما يتغير حجم المؤسسة.

II ـ الفروض التي يقوم عليها تحليل التكاليف المتوسطة في الفترة الطويلة:

1 ـ كل العوامل يمكن تغيير كمياتها.

2 ـ بعض العوامل غير قابلة للتجزئة.

3 ـ تسمح الزيادة في كميات كل العوامل بمزيد من التخصص في استخدام وحدات معينة.

4 ـ لا يمكن مضاعفة العمل الإداري بنفس الطريقة التي يمكن بها زيادة العوامل الأخرى.

5 ـ ثبات الظروف الفنية للإنتاج وأسعار عوامل الإنتاج.

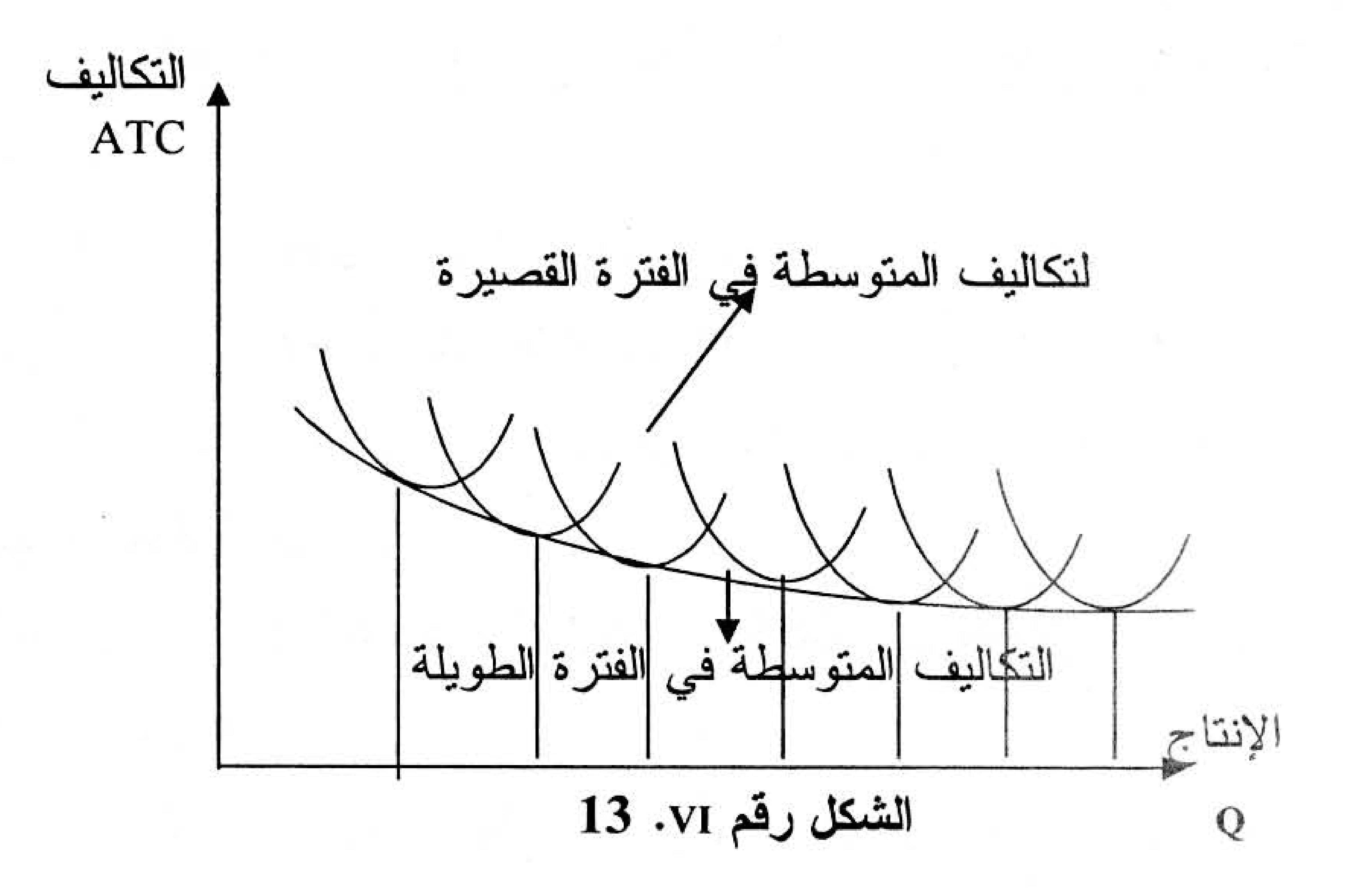
6 ـ الوحدات المتتابعة من عوامل الإنتاج ذات درجة كفاية إنتاجية واحدة.

III ـ العلاقة بين منحنيات التكاليف المتوسطة في الفترة القصيرة ومنحنى التكاليف المتوسط في الفترة الطويلة:

تخضع العلاقة بين منحنيات التكاليف المتوسطة في الفترة القصيرة ومنحنى التكاليف المتوسطة في الفترة الطويلة إلى فرضيتين.

الفرضية الأولى: عدم قابلية عوامل الإنتاج للتجزئة.

تعنى عدم قابلية العوامل الإنتاجية للتجزئة أنه لا يمكن تجزئتها إلى وحدات لا متناهية في الصغر أو كفايتها الإنتاجية تقل إذا استخدمت دون حجم معين وفي هذه الحالة يكون شكل منحنى التكاليف المتوسطة كالشكل رقم IV . 13.




**الشكل رقم VI. 13**

<u>العلاقة بين التكلفة المتوسطة والتكلفة الحدية وقوانين الغلة:</u>

للبحث في هذه العلاقة نعرف أولا مرونة التكاليف ويمكننا أن نعرفها على أنها درجة استجابة التكاليف الكلية للتغيير النسبي في حجم الإنتاج.

$$E = \frac{dTc}{Tc} / \frac{dQ}{Q} = \frac{dTc}{dQ} \cdot \frac{Q}{Tc}$$

ومنه
$$E = \frac{dTc}{dQ} / \frac{Tc}{Q}$$

حيث تمثل $\frac{dTc}{dQ}$ التكلفة الحدية، وتمثل $\frac{Tc}{Q}$ التكلفة المتوسطة.

أي مرونة التكاليف = التكلفة الحدية ÷ التكلفة المتوسطة = $E = \frac{Mc}{Ac}$

إذن نلاحظ أن مرونة التكاليف هي علاقة تربط بين التكلفة الحدية والتكلفة المتوسطة.

أ) إذا كانت $E<1$ تكون التكلفة الحدية أصغر من التكلفة المتوسطة ويحدث هذا عندما يكون الإنتاج خاضعا لتزايد الغلة أي تحقق زيادة نسبية في الإنتاج بتكلفة نسبية أقل.

ب) إذا كانت $E=1$ تكون التكلفة الحدية مساوية للتكلفة المتوسطة ويحدث ذلك عندما يخضع الإنتاج لثبات الغلة أي تحقق زيادة نسبية في الإنتاج بنفس الزيادة النسبية في التكاليف.

ج) إذا كانت $E>1$ تكون التكلفة الحدية أكبر من التكلفة المتوسطة ويحدث ذلك عندما يخضع الإنتاج لتناقص الغلة أي تحقق زيادة نسبية في الإنتاج بتكلفة نسبية أكبر.

وعلى أساس هذا المقياس نستطيع أن نحسب مرونة التكاليف عند أي حجم إنتاجي ونستطيع أن نحدد المرحلة التي يخضع لها الإنتاج كما يمكننا حساب حجم الإنتاج عند أي قيمة للمرونة.

ومثال: مؤسسة تنتج سلعة معينة وفق ثلاث طرق مختلفة فإذا كانت دوال الإنتاج الثلاث في الفترة القصيرة هي:

$$Q_1 = 3L^{1/4}K^{1/4}$$

$$Q_2 = 2L\sqrt{L}\sqrt{K}$$

$$Q_3 = KL$$

أما المواد المخصصة للإنفاق على المستخدمات من عوامل الإنتاج هي

$$C = 10L + 6K$$

1ـ عين دالة التكاليف كدالة صريحة في الإنتاج.

2ـ أحسب دوال التكلفة المتوسطة والتكلفة الحدية.

3 ـ ما هي المراحل التي يمر بها الإنتاج حسب كل دالة.

4 ـ نفرض أن حجم الموارد المخصصة للإنفاق على المستخدمات ثابت وهو 250 أحسب الحجم الأمثل لعوامل الإنتاج لكي يكون المنتج رشيدا. ( بالنسبة للدالة الأولى ).

5ـ مثل بيانيا دوال التكلفة الكلية والمتوسطة والحدية.

<u>الجواب:</u>

لتعيين دالة التكاليف كدالة صريحة في مستوى الإنتاج في الفترة القصيرة نستخدم ثلاث معادلات هي دالة الإنتاج ـ معادلة التكاليف ـ دالة مسار التوسع.

لدينا دالة الإنتاج $Q_1 = 3L^{1/4}K^{1/4}$

ومعادلة التكاليف $C = 10L + 6K$

أما دالة مسار التوسع فيمكننا إيجادها من الصيغة التالية:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} \Big/ \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{3}{4}\mathrm{L}^{-3/4}K^{1/4}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{3}{4}\mathrm{L}^{1/4}K^{-3/4}$$

إذن:

$$\frac{\frac{3}{4}L^{-3/4}K^{1/4}}{\frac{3}{4}L^{1/4}K^{-3/4}} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{K}{1}=\frac{10}{6}\Leftrightarrow K=\frac{10}{6}L=\frac{5}{3}L$$

إذن دالة مسار التوسع هي $K=\frac{5}{3}L$

بالتعويض عن K في دالة الإنتاج

$$Q=3L^{1/4}(\frac{5}{3}L)^{1/4}$$

$$Q=3(\frac{5}{3})^{1/4}L^{2/4}$$

$$Q=3(\frac{5}{3})^{1/4}L^{1/2}$$

$$L^{1/2}=\frac{Q}{3(\frac{5}{3})^{1/4}}$$

$$L=\frac{Q^2}{9(\frac{5}{3})^{1/2}}\frac{\sqrt{3}Q^2}{9\sqrt{5}}$$

بالتعويض عن K في C نحصل على

$$C=10L+6(\frac{5L}{3})=10L+10L=20L$$

إذا عوضنا عن قيمة L في C نحصل على

$$C=20(\frac{\sqrt{3}Q^2}{9\sqrt{5}})=\frac{20\sqrt{3}}{9\sqrt{5}}Q^2$$

عندما: $Q=Q_2=2\sqrt{L}\sqrt{K}=2(L)^{1/2}(K)^{1/2}$

$$\frac{\upsilon Q}{\upsilon L}/\frac{\upsilon Q}{\upsilon K}=\frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{\upsilon Q}{\upsilon l}=\frac{1}{2}2L^{-1/2}K^{1/2}=\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{L}}$$

$$\frac{\upsilon Q}{\upsilon K}=\frac{1}{2}2L^{1/2}K^{-1/2}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{K}}$$

$$\frac{\sqrt{K}/\sqrt{L}}{\sqrt{L}/\sqrt{K}}=\frac{10}{6}\Rightarrow\frac{K}{L}=\frac{10}{6}\Rightarrow L=\frac{10}{6}L$$

بالتعويض عن K في Q

$$Q = 2\sqrt{L}\sqrt{(\frac{10}{6}L)}$$

$$Q = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{6}}L \Rightarrow L = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{10}}.Q$$

بالتعويض عن L في C نحصل على

$$C = 20L = 20(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{10}}Q) = 10\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}.Q$$

$$C = 10 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}Q$$

عندما

$$Q = Q_3 = LK$$

$$\frac{\upsilon Q}{\upsilon L} / \frac{\upsilon Q}{\upsilon K} = \frac{P_L}{P_K}$$

$$\frac{K}{L} = \frac{10}{6} \Rightarrow K = \frac{10}{6}L$$

نعوض عن K في Q

$$Q = L(\frac{10}{6}L) \Rightarrow Q = \frac{10}{6}L^2$$

$$Q = \frac{10}{6}L^2 \Rightarrow L = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\sqrt{Q}$$

$$C = 20L = \frac{20\sqrt{3}\sqrt{Q}}{\sqrt{5}}$$

2 ) حساب التكلفة المتوسطة والتكلفة الحدية.

بالنسبة لدالة الإنتاج الأولى:

$$Ac = \frac{C}{Q} = \frac{20\sqrt{3}Q}{9\sqrt{5}}$$

$$Mc = \frac{dc}{dQ} = \frac{40\sqrt{3}Q}{9\sqrt{5}}$$

بالنسبة لدالة الإنتاج الثانية:

$$Ac = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$Mc = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

بالنسبة لدالة الإنتاج الثالثة:

$$Ac = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{Q}}$$

$$Ac = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{Q}}$$

3ـ لكي نعرف المراحل التي يمر بها الإنتاج حسب كل دالة نحسب مرونة الإنتاج.

$$E = \frac{Mc}{Ac}$$

بالنسبة لدالة الإنتاج الأولى

$$E = \frac{(40\sqrt{3}Q)/9\sqrt{5}}{(20\sqrt{3}Q)/9\sqrt{5}} = 2$$

يمر الإنتاج بمرحلة تزايد الغلة لأن $E \rangle 1$

بالنسبة لدالة الإنتاج الثانية:

$$E = \frac{(10\sqrt{3})/\sqrt{5}}{(10\sqrt{3})/9\sqrt{5}} = 1$$

يمر الإنتاج بمرحلة ثبات الغلة لأن $E = 1$

بالنسبة لدالة الإنتاج الثالثة:

$$E = \frac{(10\sqrt{3})/\sqrt{5Q}}{(20\sqrt{3})/\sqrt{5Q}} = \frac{1}{2}$$

يمر الإنتاج بمرحلة تناقص الغلة لأن $E\langle 1$.

4 ـ لكي يعظم المنتج إنتاجه ضمن الموارد المخصصة للإنفاق الثابتة والمحدودة يستخدم تابع الهدف التالي

$$V = 3L^{1/4}K^{1/4} + \lambda(250 - 10L - 6K)MAX$$

الشرط اللازم: البحث عن نقطة استقرار.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial L} &= \frac{3}{4}L^{-3/4}K^{1/4} - 10\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3L^{-3/4}K^{1/4}}{40} \\ \frac{\partial V}{\partial K} &= \frac{3}{4}L^{1/4}K^{-3/4} - 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{3L^{1/4}K^{-3/4}}{24} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{K}{L} = \frac{10}{6}$$

ومنه $K = \frac{10}{6}L$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda} = 250 - 10L - 6K - 0$$

بالتعويض عن K بقيمتها في المعادلة الأخيرة نحصل على

$$250 - 10L - 6(\frac{10L}{6}) = 250 - 20L = 0$$

ومنه $L = \frac{25}{2}$

وبالتعويض عن L في K نجد

$$K = \frac{10}{6}L = \frac{10}{6}(\frac{25}{2}) = \frac{125}{6}$$

<u>الشرط الكافي</u>: التأكد من أن لها نهاية عظمى عندما:

$$(L, K) = (\frac{25}{2}, \frac{125}{6})$$

وذلك بأن يكون:

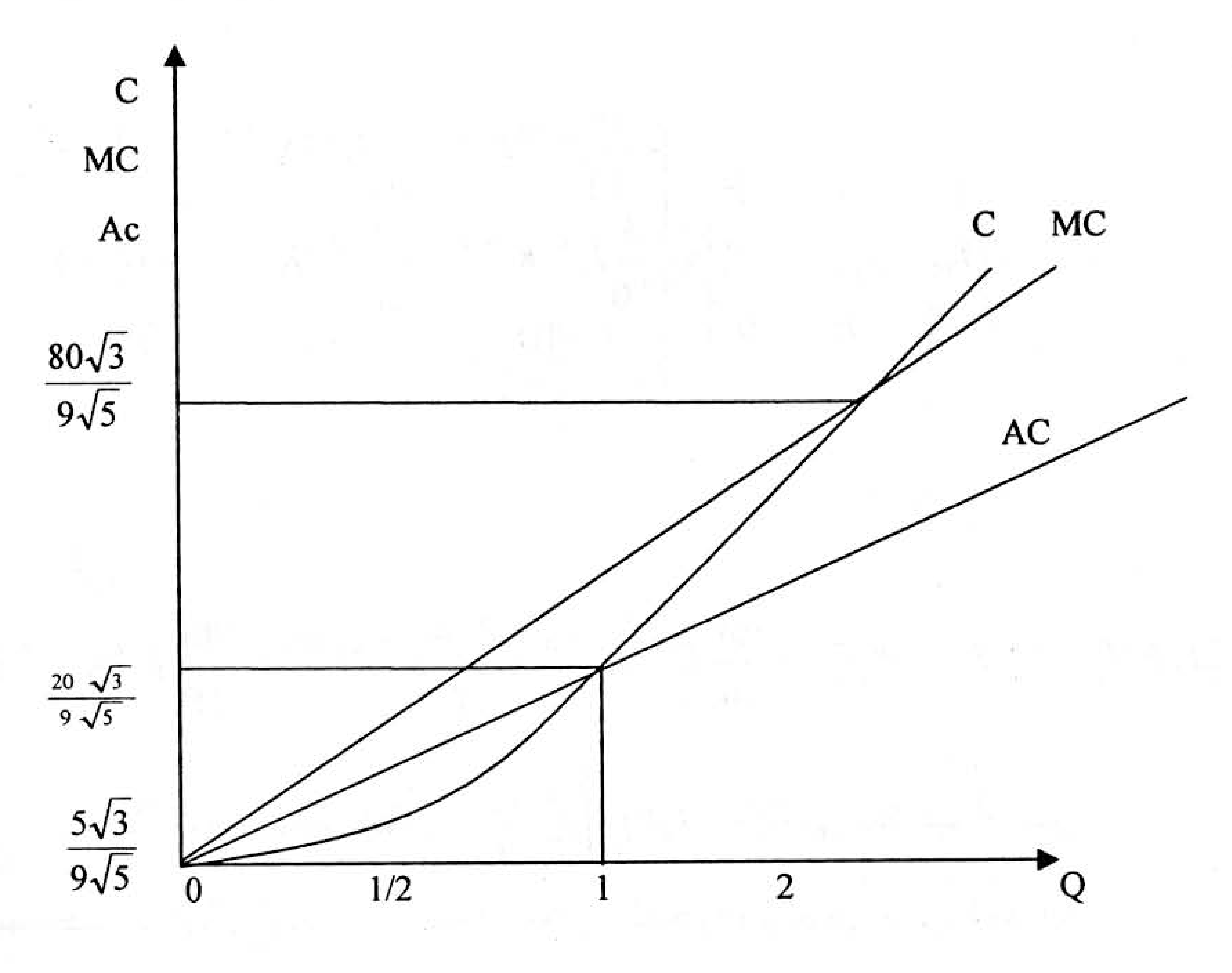
$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{1K} & -P_1 \\ f_{K1} & f_{KK} & -P_K \\ -P_1 & -P_K & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{9}{16}L^{-7/4}K^{1/4} & \frac{3}{16}L^{-3/4}K^{-3/4} & -10 \\ \frac{3}{16}L^{-3/4}K^{-3/4} & \frac{-9}{16}L^{1/4}K^{-7/4} & -6 \\ -10 & -6 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

أي:

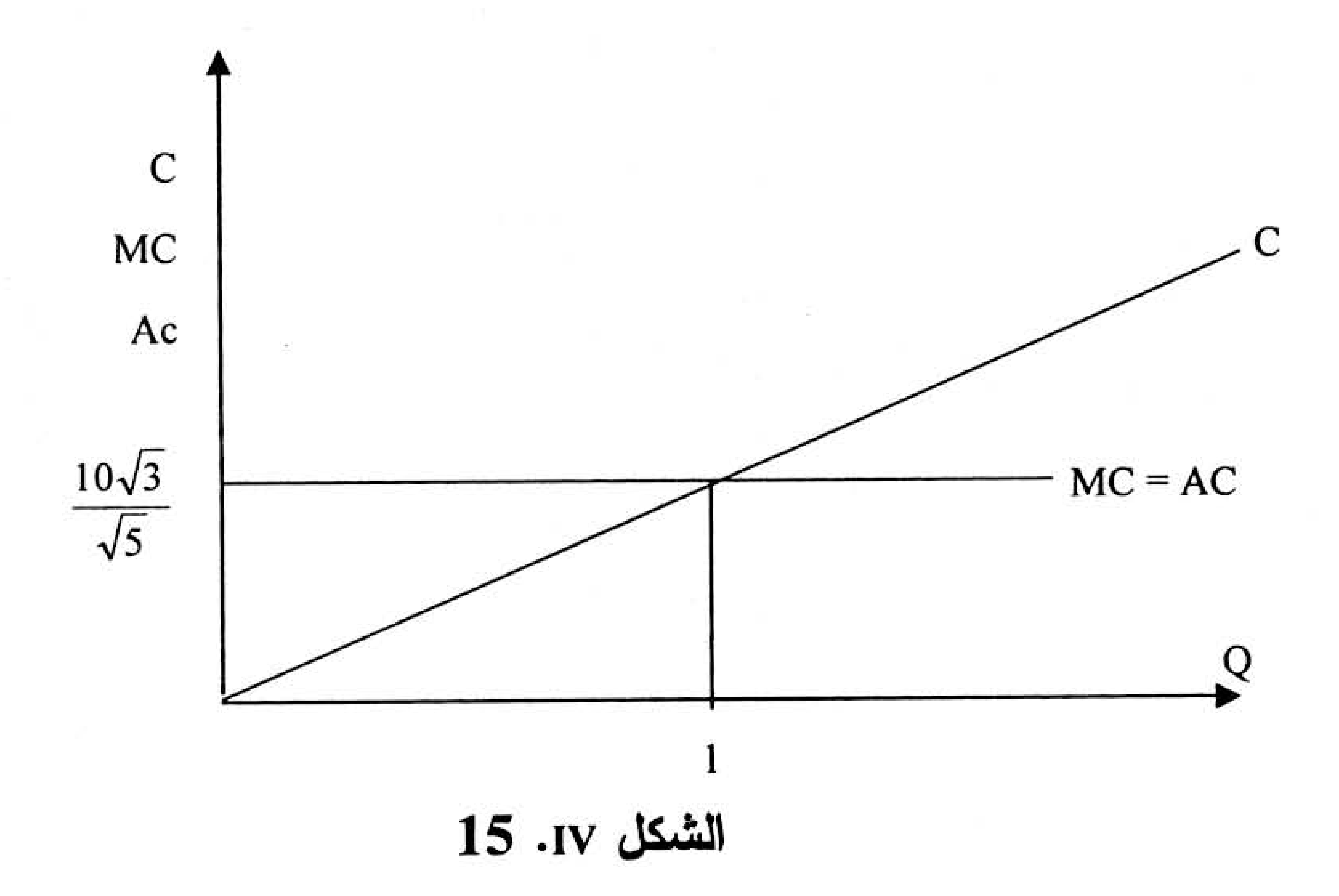
$$2P_LP_Kf_{1k} - P_k^2f_{11} - P_1^2f_{kk} = \frac{360}{16}L^{-3/4}K^{-3/4} + \frac{324}{16}L^{-7/4}K^{1/4} + \frac{900}{16}L^{1/4}K^{-7/4} > 0$$

وهذا محقق عندما تكون $(L,K)=\left(\frac{25}{2},\frac{125}{6}\right)$ وبالتالي فالثنائيـــة مـــن المستخدمات تعظم الإنتاج في حدود الموارد المحدودة وتجعل مـــن المنـــتج رشيدا.

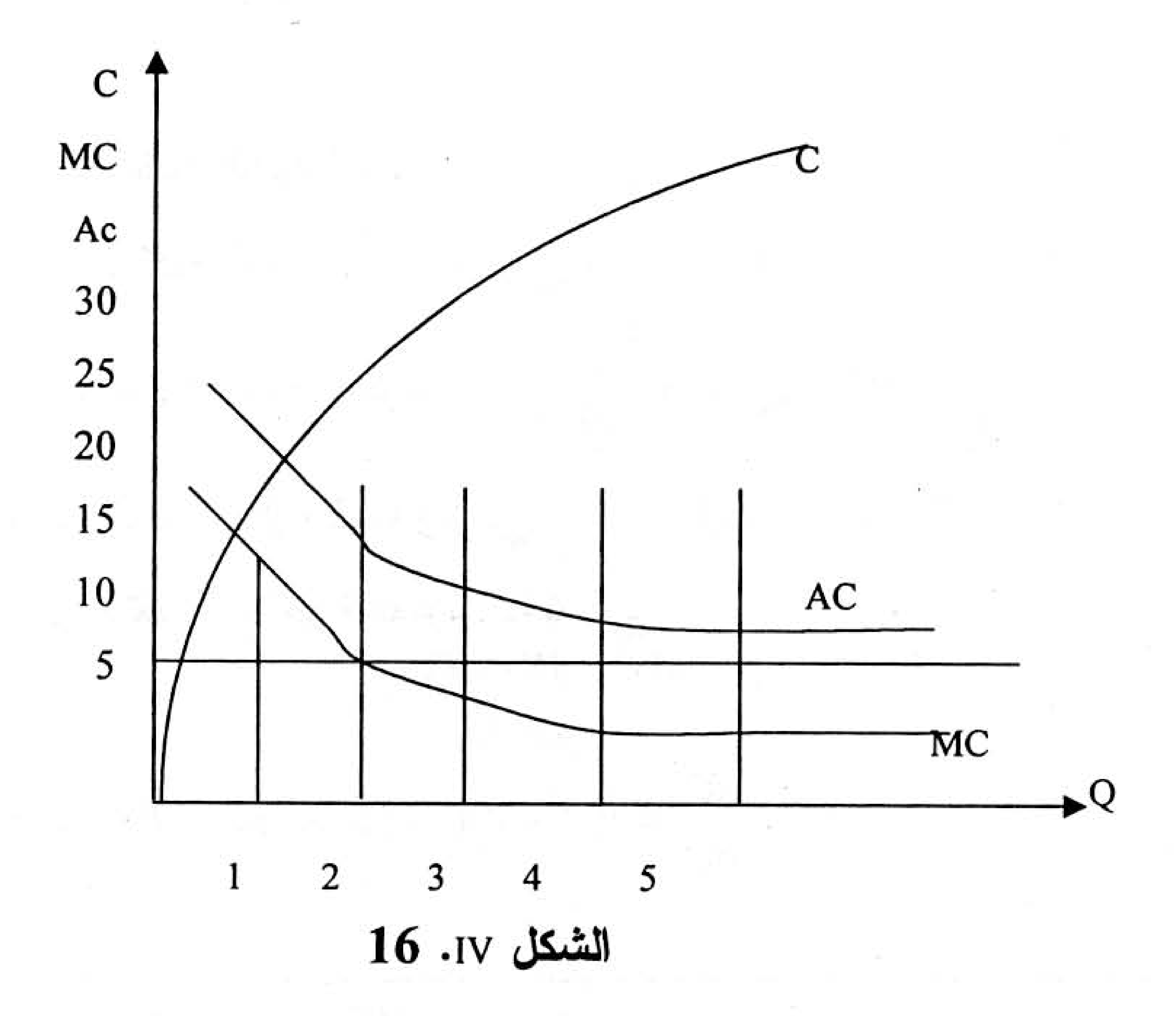
5 ــ تمثيل دوال التكلفة الكلية والمتوسطة والحدية بيانيا:




الشكل IV. 14




الشكل IV. 15




**الشكل IV. 16**

**مثال 2:**

إذا كانت دالة التكاليف الكلية للإنتاج هي: $C = Q^3 - 60^2 + 15Q + 2$

وأخذت Q القيم من 1 إلى 6

1 ــ عين التكلفة الكلية الثابتة.

2 ــ عين التكلفة الثابتة المتوسطة.

3 ــ عين التكلفة الكلية المتوسطة.

4 ــ عين التكلفة الكلية المتغيرة.

5 ــ عين التكلفة المتغيرة المتوسطة.

6 ــ عين التكلفة الحدية.

7 ــ مثل هذه الدوال بيانيا.

**الجواب:**

1 ـــ التكلفة الكلية الثابتة هي 2 $F_C = 2$

2 ـــ التكلفة الثابتة المتوسطة هي $AF_C = \frac{2}{Q}$

3 ـــ التكلفة الكلية المتوسطة هي $A_C = \frac{C}{Q} = Q^2 - 6Q + 15 + \frac{2}{Q}$

4 ـــ التكلفة الكلية المتغيرة هي $V_C = C - F = Q^3 6Q^2 + 15Q$

5 ـــ التكلفة المتغيرة المتوسطة تساوي

$$AVC = AC - AFC$$
$$= Q^2 - 6Q + 15$$

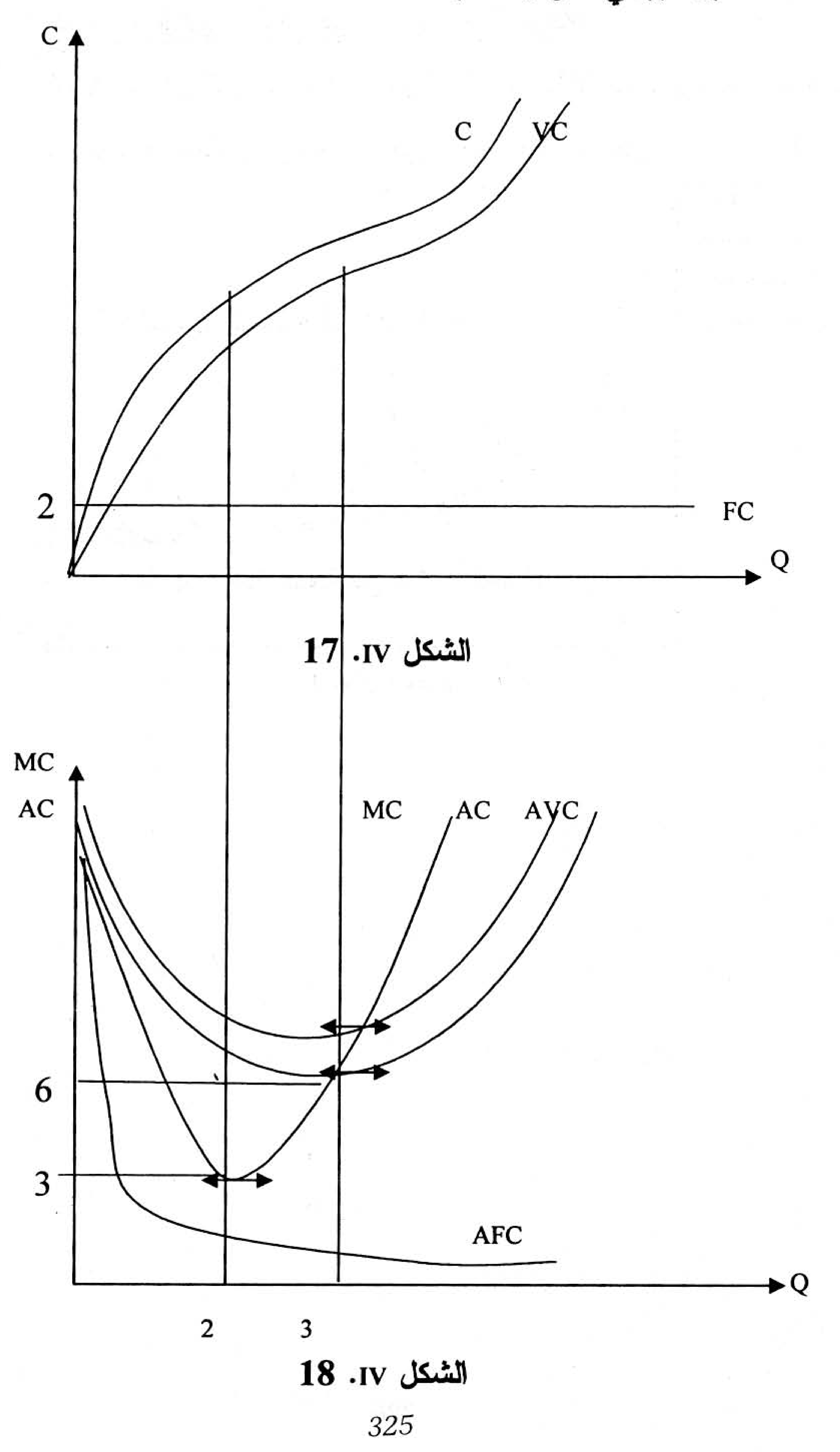
6 ـــ التكلفة الحدية $M_C = \frac{dC}{dQ} = 3Q^2 - 12Q + 15$

| Q | C | VC | AVC | AFC | AC | MC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 10 | 10 | 2 | 12 | 6 |
| 2 | 16 | 14 | 07 | 1 | 08 | 3 |
| 3 | 20 | 18 | 6 | 0,66 | 6,66 | 6 |
| 4 | 30 | 28 | 07 | 0,5 | 7,5 | 15 |
| 5 | 52 | 50 | 10 | 0,4 | 10,4 | 30 |
| 6 | 92 | 90 | 15 | 0,33 | 15,33 | 51 |

حيث:

$$C = Q^3 - 6Q^2 + 15Q = 2$$
$$V_C = Q^3 - 6Q^2 + 15Q$$
$$AVC = Q^2 - 6Q + 15$$
$$AF_C = \frac{2}{Q}$$
$$A_C = Q^2 - 6Q + 15 + \frac{2}{Q}$$
$$M_C = 3Q^2 - 12Q + 15$$

**7 ـ التمثيل البياني للدوال السابقة:**

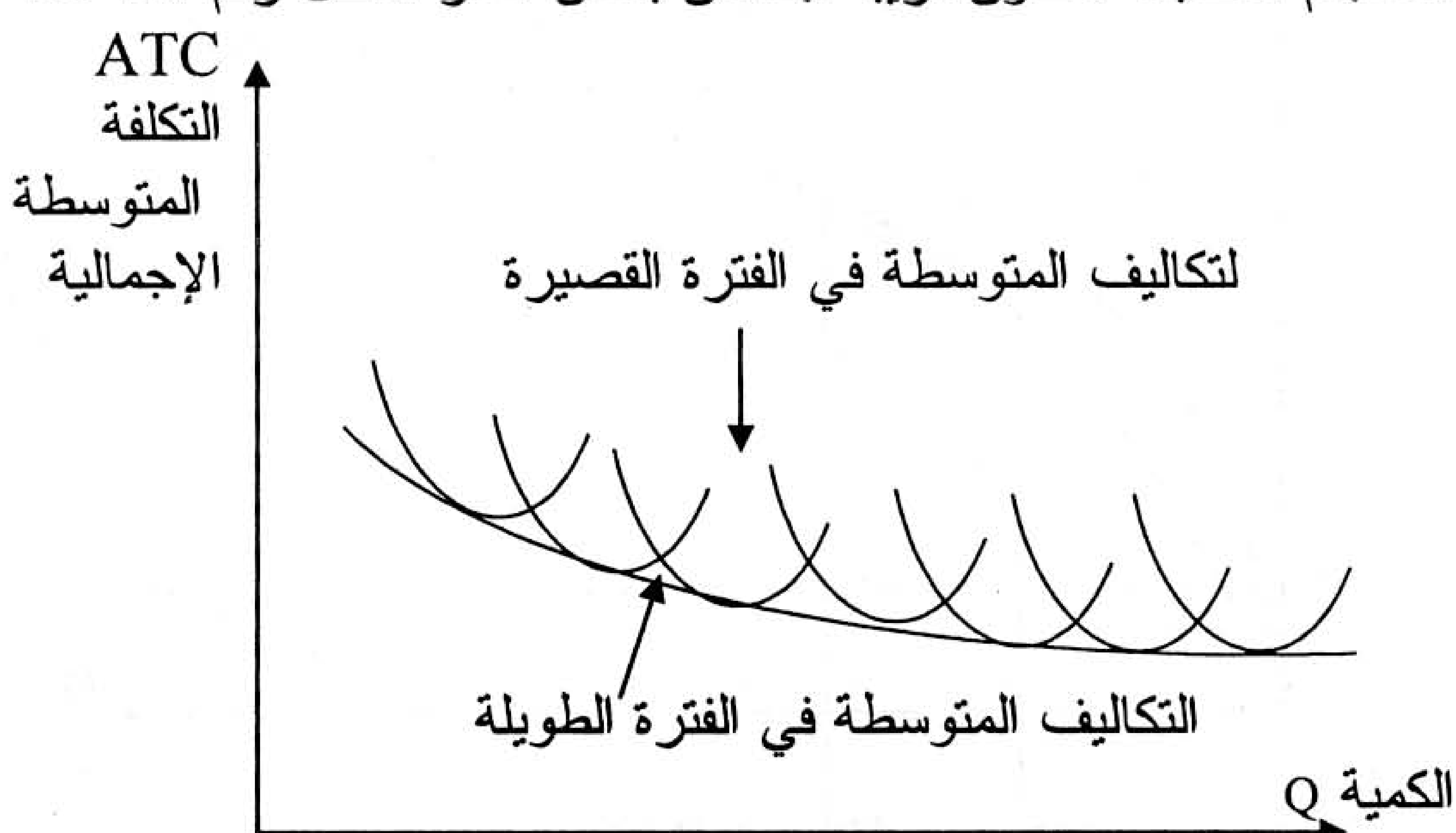



**الشكل IV. 17**

**الشكل IV. 18**

الفرضية الثانية: قابلية عوامل الإنتاج للتجزئة:

إذا كانت كل العوامل قابلة للتجزئة إلى وحدات صغيرة جدا، فإن الأحجام المتتابعة ستكون قريبة جدا من بعض أنظر الشكل رقم IV. 19.




**الشكل رقم VI. 19**

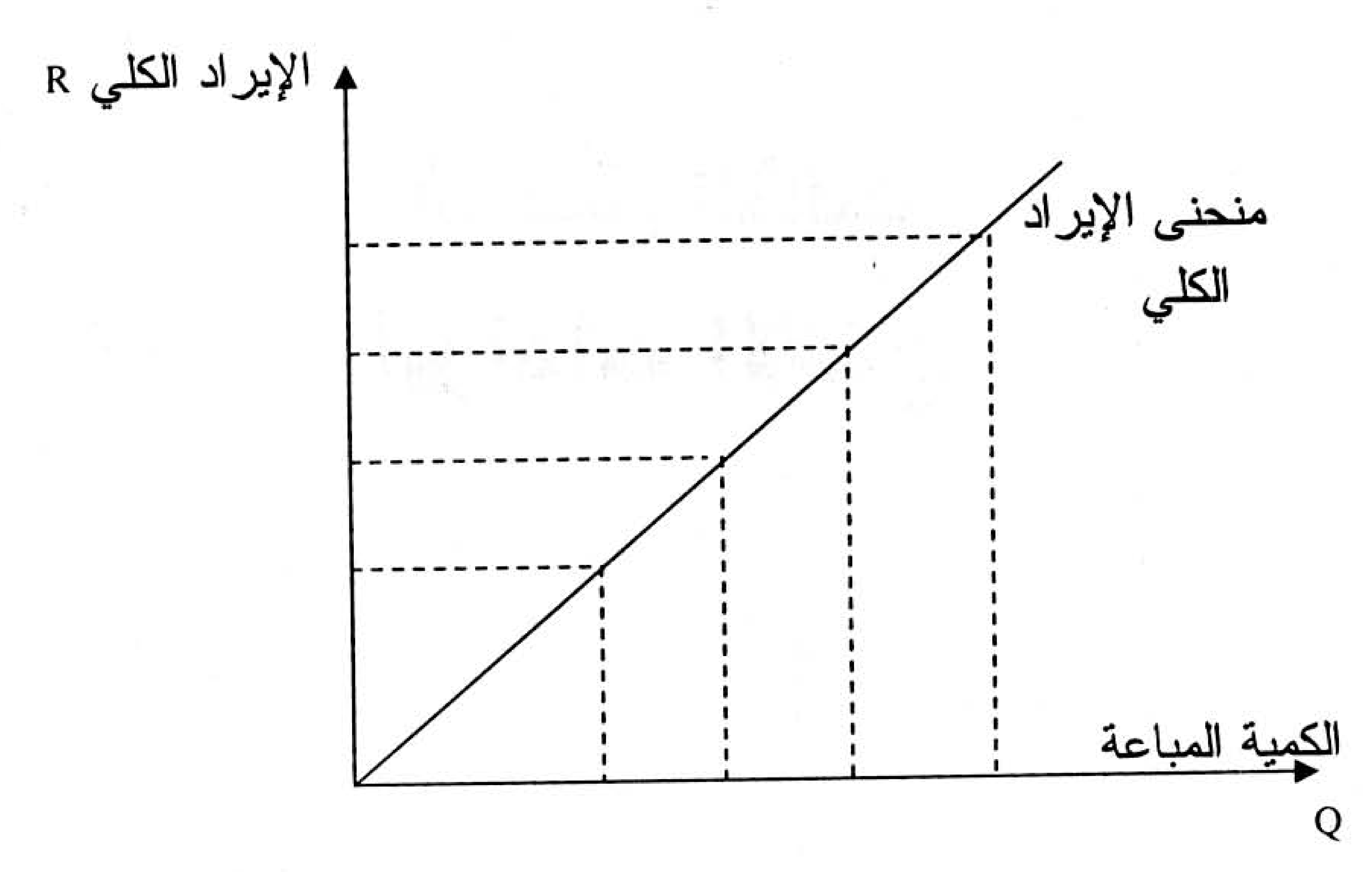
# الفصل الثالث

# إيرادات الإنتاج

## I ـ إيرادات الإنتاج

ينفق المنتج على شراء الإنتاج حيث يستخدم هذه العوامل فـــي إنتـــاج منتجة ثم بيعه في سوق السلع ومنه نرى أن المنتج يتعامل مع سوقين ســـوق عوامل الإنتاج وسوق السلع لذا فإن توازن المنتج يجب أن يتم في الســـوقين ولكل منهما شروط توازن وفي بحثنا هذا نتناول توازن المنتج فـــي ســـوق السلع.

1 ـ الإيراد الكلي: هو مجموع ما يقبضه المنتج نتيجة بيع منتجاته في السوق، وفي ظروف المنافسة الكاملة يكون الإيراد الكلي R = P . Q ويمكـــن تمثيل منحنى الإيراد الكلي ( أنظر الشكل رقم IV. 20 ).




**الشكل رقم IV. 20**

2 ـ <u>الإيراد المتوسط</u>: هو عبارة عن نصيب الوحـــدة المباعـــة مـــن الإيراد الكلي أي: $AR = \frac{R}{Q} = \frac{p.Q}{Q} = P$

أي السعر يساوي الإيراد المتوسط.

3 ـ الإيراد الحدي: هو مقدار التغير في الإيراد الكلي نتيجة التغير في الكمية المباعة بوحدة واحدة $MR = Lim_{\Delta Q \to Q} \frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{dR}{dQ}$

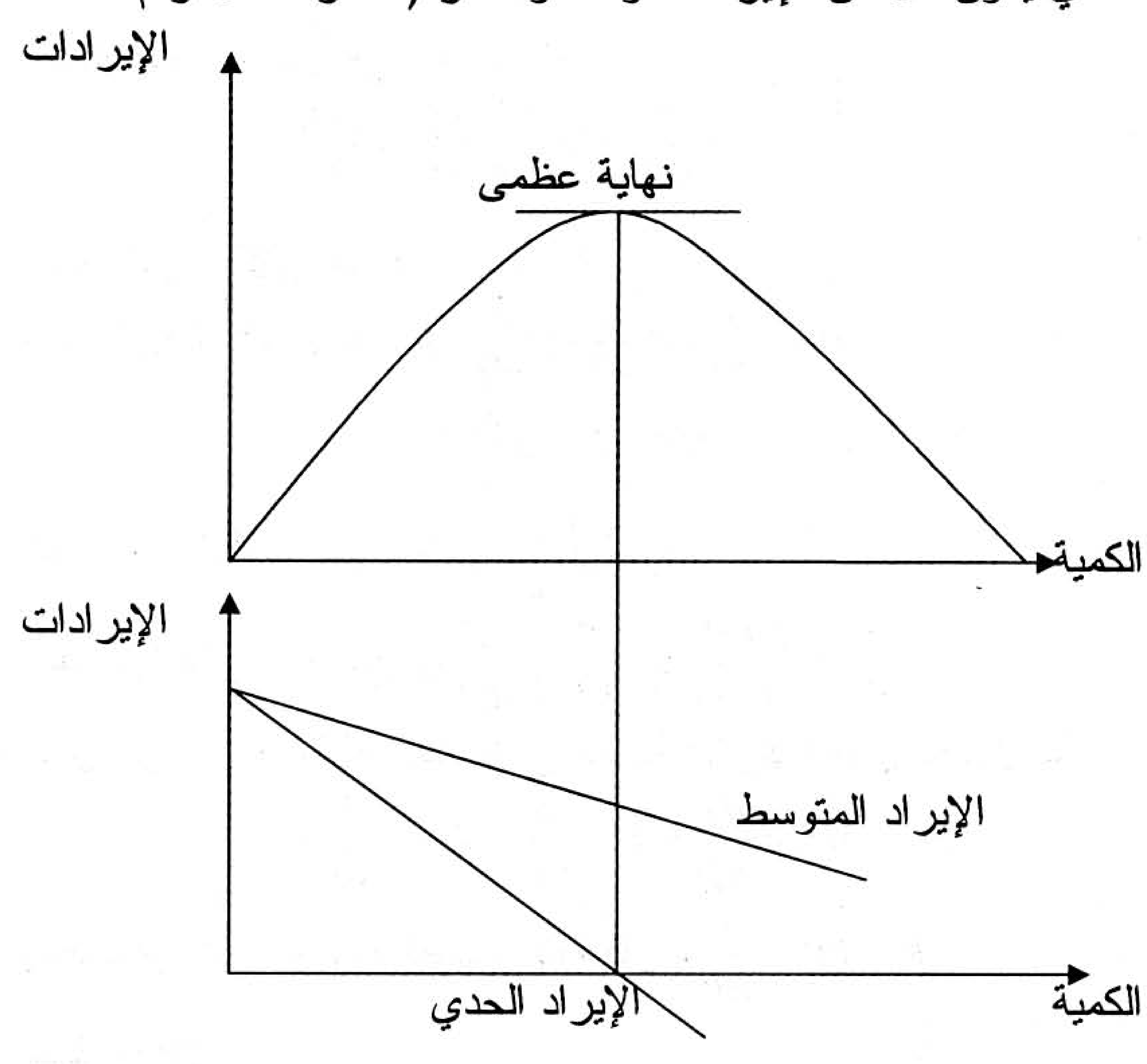
أي مشتق الإيراد الكلي بالنسبة للكمية المنتجة، والجدير بالذكر أنه:

إذا سادت السوق منافسة تامة فإن الإيراد الحدي يساوي، الإيراد المتوسط ويساوي السعر.

ويكون منحنى الإيراد الحدي والإيراد المتوسط والسعر عبارة عن منحنى واحد على شكل خط مستقيم يقطع محور الإيرادات في النقطة (O , P).

$$MR = AR = P$$

أما إذا سادت المنافسة الناقصة السوق ( أحوال الإحتكار )، فإن الإيراد الحدي يكون أقل من الإيراد المتوسط والسعر ( أنظر الشكل رقم IV. 21 ).




**الشكل رقم IV. 21**

**ملاحظة:**

إذا كانت $E_D \rangle 1$ فإن الإيراد الكلي سيرتفع كلما انخفض السعر وزادت الكمية المطلوبة.

إذا كانت $E_D \langle 1$ فإن الإيراد الكلي سينخفض كلما انخفض السعر وزادت الكمية المطلوبة.

**II – العلاقة بين الإيراد الحدي والإيراد المتوسط ومرونة الطلب:**

لمعرفة هذه العلاقة نعرف مرونة الإيرادات الكلية على أنها درجة استجابة الإيرادات الكلية

نتيجة التغير النسبي في حجم الإنتاج

$$E = \frac{dR}{dQ}.\frac{Q}{R} = \frac{dR/dQ}{R/Q} = \frac{MR}{AR}$$

لدينا الإيراد الكلي يساوي: $R = P.Q$

ومنه الإيراد الحدي يساوي $MR = \frac{dR}{dQ} = P.\frac{dQ}{dQ} + Q\frac{dP}{dQ}$

$$MR = P + Q\frac{dP}{dQ}$$

أما مرونة الطلب فإنها تساوي $EP = \frac{dQ}{dP}.\frac{P}{Q}$

وبقسمتها على P تصبح $\frac{EP}{P} = \frac{dQ}{dP}.\frac{1}{Q} \Leftrightarrow \frac{P}{EP} = \frac{dP}{dQ}.Q$

وبالتعويض عن هذه المعادلة الأخيرة في معادلة الإيراد الحدي نحصل على

$$MR = \frac{dR}{dQ} = P + \frac{p}{EP} = P(1 + \frac{1}{EP})$$

وحيث أن إشارة مرونة الطلب سالبة فإن $MR = P(1 - \frac{1}{EP})$

حيث $EP \rangle 0$

وحيث P = AR

فإن:

$$MR = AR(1-\frac{1}{EP})$$

ومنه

$$\frac{MR}{AR} = (1-\frac{1}{EP})$$

وهي نفسها مرونة الإيرادات الكلية نتيجة التغير النسـبي فـي حجـم الإنتاج

حيث مرونة الإيرادات الكلية = الإيراد الحدي ÷ الإيراد المتوسط $(\frac{MR}{AR})$

من هذه العلاقة نلاحظ ما يلي:

أ ) يكون الإيراد الحدي مساوي للصفر إذا كـان الطلـب متكـافىء المرونة أي أن الإيراد الكلي يبقى ثابتا وتكون مرونـة الإيـرادات الكليـة مساوية للصفر.

ب) يكون الإيراد الحدي موجبا إذا كانت مرونة الطلب أكبر من الواحد وبذلك يزيد الإيراد الكلي كلما انخفض السعر وتكون مرونة الإيرادات الكلية موجبة (السوق لا تسودها المنافسة التامة).

ج ) يكون الإيراد الحدي سالبا إذا كانت مرونة الطلب أقل من الواحد وبذلك ينقص الإيراد الكلي إذا انخفض السعر وتكون مرونة الإيرادات الكلية سالبة ( السوق لا تسودها المنافسة التامة ).

د ) إذا كانت مرونة الطلب لا نهائية فإن مرونـة الإيـرادات الكليـة تساوي الواحد أي عند بيع وحدة إضافية فإن الإيرادات الكلية تزيد بقيمة سعر الوحدة السائد في السوق وهذا لا يكون إلا في حالة السوق التـي تسـودها المنافسة التامة.

# مراجع الجزء الأول

## أولا: المراجع باللغة العربية:

1 ــ د. عبد العزيز هيكل، أسئلة وأجوبة في الاقتصاد التحليلي والاقتصاد الرياضي والقياسي معمبادئ الإحصاء والرياضة البحتة، بيروت . مكتبة مكاوي. 1975.

2 ــ إسماعيل هاشم محمد هاشم، مبادئ الاقتصاد التحليلي، بيروت، دار النهضة العربية 1978.

3 ــ د. هناء خير الدين، الاقتصاد الرياضي، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، الطبعة الأولى 1979.

4 ــ عباس مهلهل، . جيمي م هندرسون ريتشارد، أ. كوندت، ترجمة متوكل عباس مهلهل. نيويورك. دار ماكجروهيل للنشر 1983.

5 ــ أحمد جامع، النظرية الاقتصادية، الجزء الأول، التحليل الاقتصادي الجزئي، القاهرة، دار النهضة العربية، الطبعة الخامسة، 1986.

6 ــ عمر صخري، مبادئ الاقتصاد الوحدي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1986.

7 ــ ضياء مجيد الموسوي، النظرية الاقتصادية، التحليل الاقتصادي الجزئي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

8 ــ بيار غريز فار، الحساب التفاضلي والمعادلات التفاضلية، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

9 ــ علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

10 ــ شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1990.

## ثانيا: المراجع باللغة الفرنسية

1 – Ferguson (C.E), Théorie microéconomiques, Paris, Economica 1982.

2 – Lesourne ( Jacques), Analyses microéconomiques, Paris, ESI 1985.

3 – Abraham Frois (Gilber), Microéconomie, Paris Economica 1986.

4 – Fiori (G), Introduction élémentaire à la microéconomie. Librairie de l'université. Aix en Provence 1986.

9 – Picard (Pierre), éléments de microéconomie, Théorie et applications, Paris montchrestien 1987.

.



# الباب الخامس

# السوق وتوازن المنتج

**تمهيد :**

يقوم المنتج حسب دالة الإنتاج بالمزج بين عوامل الإنتاج المختلفة لإنتاج منتج معين وعرضه في سوق لها خصائصها والحصول على إيراد مقابل بيعها، وتصنف الأسواق إلى عدة أنواع حسب خصائصها أي حسب الظروف التنافسية، وهي المنافسة، الإحتكار التام، المنافسة الإحتكارية إحتكار القلة...إلخ. وسنتناول في هذا الباب ما يلي :

**أ ــ المنافسة التامة وبها :**

ــ توازن المنتج في حالة المنافسة التامة.

ــ توازن السوق في الفترة الطويلة ( حالة المنافسة التامة ).

**ب ــ الإحتكار وبه :**

ــ الإحتكار التام.

ــ تمييز السعر.

# الفصل الأول

# توازن المنتج في حالة المنافسة الكاملة

تقوم المنافسة التامة على عدة فروض أهمها :

أ ــ وجود عدد كبير من المنتجين يتنافسون بينهم حيث يسيطر كل منهم على جزء صغير جدا من الإنتاج الكلي وبالتالي لا يستطيع التأثير في السوق.

ب ــ وجود عدد كبير جدا من المشترين يتنافسون بينهم حيث لا يستطيع أي مشتري أن يؤثر في سعر السوق بالجزء الصغير من المشتريات الذي يشتريه.

ج ــ تجانس المنتجات فهي تؤدي نفس الوظيفة.

د ــ حرية الدخول إلى الصناعة والخروج منها حيث يجب أن تتوفر هذه الحرية بالنسبة للمنتجين وكذلك بالنسبة لمختلف عوامل الإنتاج حيث يكون إنتقال عوامل الإنتاج بين الإستعمالات البديلة مرن.

هـ ــ العلم التام بأحوال السوق أي ظروف تأكد.

و ــ نفقات النقل معدومة فرضا بسبب قرب المنتجين من بعضهم البعض.

**I ــ توازن المنتج في الفترة القصيرة :**

إن هدف المنتج هو إنتاج الكمية التي تحقق له أقصى ربح ممكن.

لدينا الربح يساوي : $\pi = R - C$

وبما أن السعر يكون ثابتا في المنافسة التامة فإن إيراد المؤسسة يتوقف على مستوى الإنتاج هو : $R = r(Q)$

وتابع التكاليف وهو: $C = h(Q) + \bar{F}$

من التابعين السابقين نجد معادلة الربح وهي: $\pi = r(Q) - h(Q) - \bar{F}$

أي أن الربح هو عبارة عن دالة في متغير واحد هو حجم الإنتاج.

الشرط اللازم لتعظيم الربح : هو البحث عن نقطة إستقرار.

$$\frac{d\pi}{dQ} = \bar{r}(Q) - \bar{h}(Q) = 0$$

أي:

$$\bar{r}(Q) = \bar{h}(Q)$$

وبما أن السوق تسودها ظروف منافسة تامة فإن :

$$\bar{r}(Q) = \bar{h}(Q) = P$$

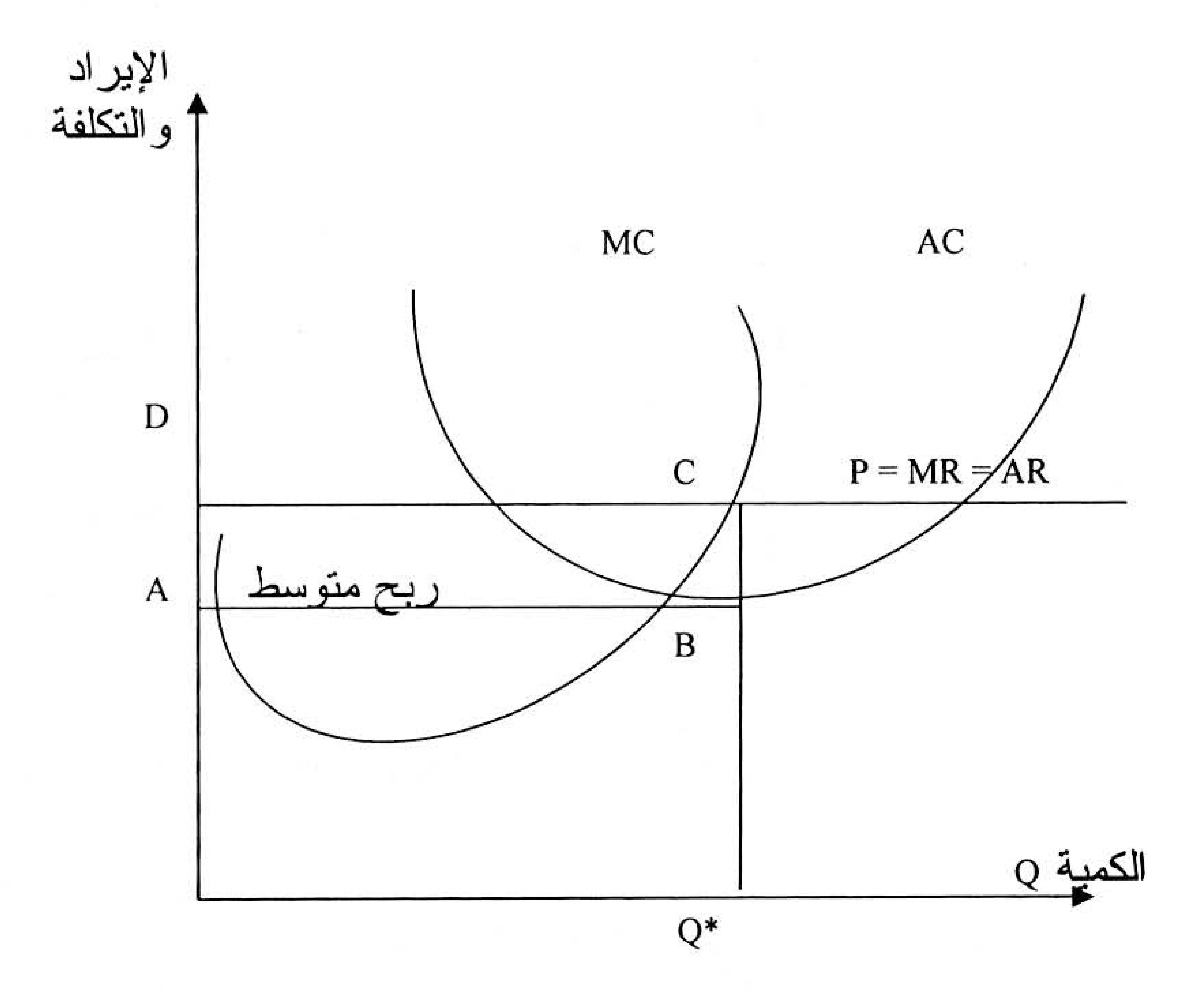
أي الإيراد الحدي يساوي التكلفة الحدية وتساوي السعر الذي هو عبارة عن الإيراد المتوسط.

**<u>الشرط الكافي لتعظيم الربح</u>** : يجب أن يكون المشتق الثاني لتابع الربح سالبا.

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = r''(Q) - h''(Q) \langle 0$$

أي $r''(Q) < h''(Q)$ وهذا يعني أنه عند النهاية العظمى للربح يجب أن يكون ميل الإيراد الحدي أصغر من ميل التكلفة الحديـــة، وبمـــا أن ميل الإيراد الحدي في ظروف المنافسة التامة يكون مساويا للصـــفر، فإنـــه يجب أن يكون ميل التكلفة الحدية موجب. $h''(Q) > 0$

وهذا يشير إلى أن زيادة حجم الإنتاج عن المستوى الذي يتساوى فيـــه الإيراد الحدي والتكلفة الحدية يؤدي إلى زيادة التكلفة الحدية بمعدل أكبر من زيادة الإيراد الحدي وكذلك يؤدي تخفيض حجم الإنتاج عن هذا المستوى إلى نقصان الربح، أنظر الشكل ( رقم ٧، 1 ).




**الشكل v. 1**

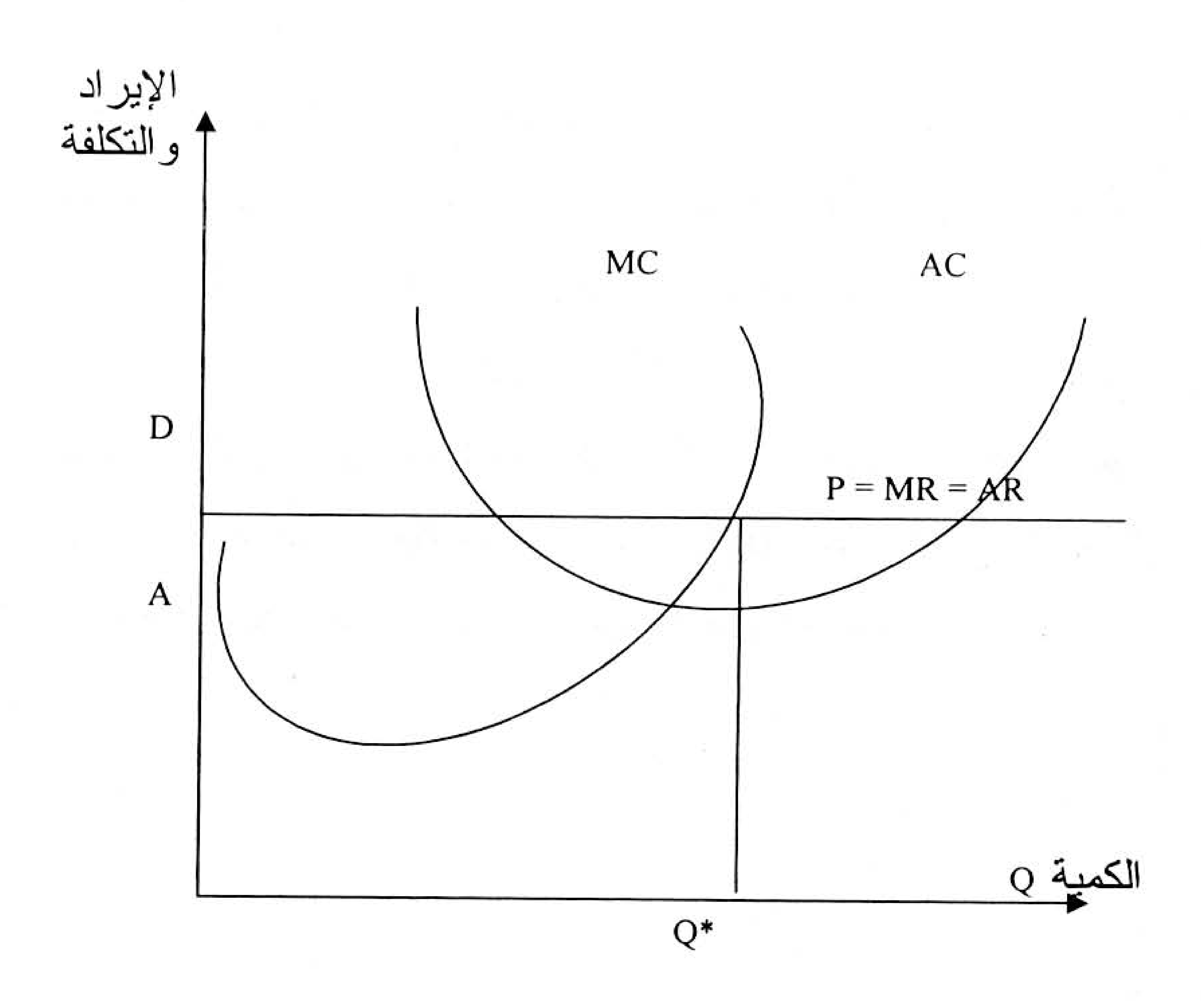
إذن عند حجم الإنتاج *Q يغطي الإيراد الكلي التكلفة الكليـــة ويحقـــق المنتج ربحا وسطيا ( A , B , C, D ).

إلا أن المنتج قد لا يحصل في الفترة القصيرة على إيراد كلي يغطـــي التكاليف الكلية ومعنى هذا أنه لا يحقق ربحا في الفترة القصيرة ومع ذلك قد يستمر المنتج في الإنتاج بشرط تدنية خسارته وتغطية على الأقل التكـــاليف المتغيرة على أمل أن يحقق ربحا في الأجل الطويل.

نستنتج مما سبق : يواجه المنتج في الفترة القصيرة ثلاث حالات نوردها فيما يلي :

<u>**الحالة الأولى**</u> : يحقق المنتج ربحا غير عادي عندما يكون الإيراد الكلي أكبر من التكلفة الكلية الإجمالية، أنظر الشكل رقم v . 1 ( السابق ).

<u>**الحالة الثانية**</u> : يحقق المنتج ربحا عاديا عندما يكون الإيراد الكلي مساويا تماما للتكلفة الكلية الإجمالية أنظر الشكل رقم v. 2 .




**الشكل 2.v**

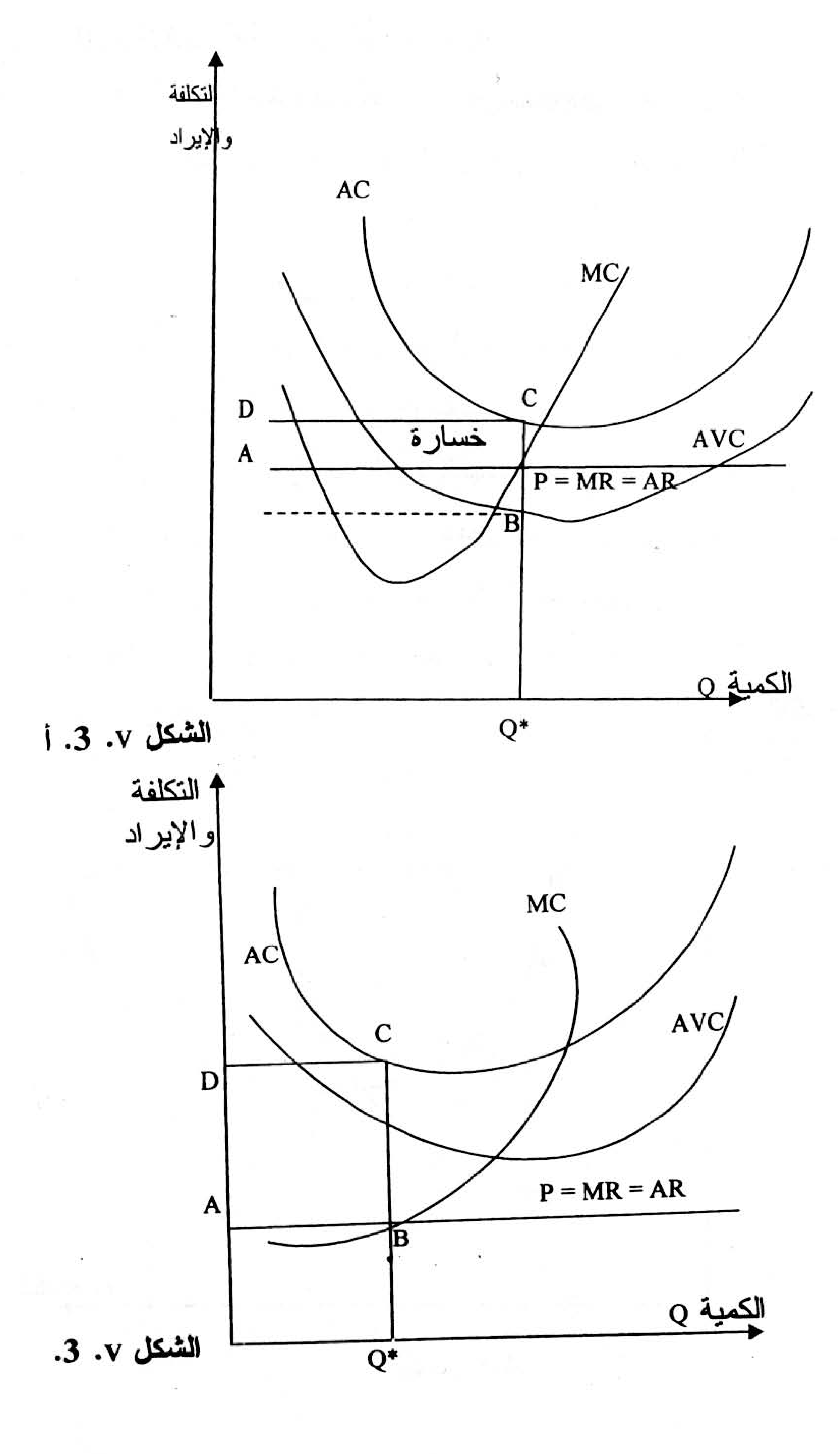
<u>**الحالة الثالثة**</u> : يواجه المنتج خسارة عندما يكون الإيراد الكلي أصغر من التكلفة الكلية الإجمالية، وفي حالة الخسارة يواجه المنتج أمرين.

1 ـ إذا كان الإيراد الكي أقل من التكاليف الكلية الإجمالية إلا أنه يغطي التكاليف الكلية المتغيرة وجزء من التكاليف الكلية الثابتة.

في هذه الحالة يستمر المنتج في الإنتاج ما دام الإيراد المتوسط (السعر) أكبر من التكلفة المتوسطة المتغيرة وما دام المنتج يتحمل هذا الجزء من التكاليف الكلية الثابتة سواء أنتج أو توقف عن الإنتاج، أنظر الشكل رقم v. 3. أ.

2 ـ إذا كان الإيراد الكلي أقل من التكاليف الكلية الإجمالية ولكن يغطي التكاليف الكلية المتغيرة، في هذه الحالة يكون سيان بالنسبة للمنتج أن ينتج أو لا ينتج لأنه سيتحمل التكاليف الثابتة في كلا الحالتين.

3 ـ إذا كان الإيراد الكلي أقل من التكاليف الكلية الإجمالية ولا يغطي حتى التكاليف المتغيرة، في هذه الحالة يكون الإيراد المتوسط ( السعر ) أقل من متوسط التكلفة المتغيرة ومن مصلحة المنتج التوقف عن الإنتاج لأنه لا يستطيع تغطية التكاليف الثابتة وكذلك التكاليف المتغيرة، أنظر الشكل رقم v. 3. ب.




الشكل v. 3. أ

الشكل v. 3.

## II – توازن المنتج في الفترة الطويلة :

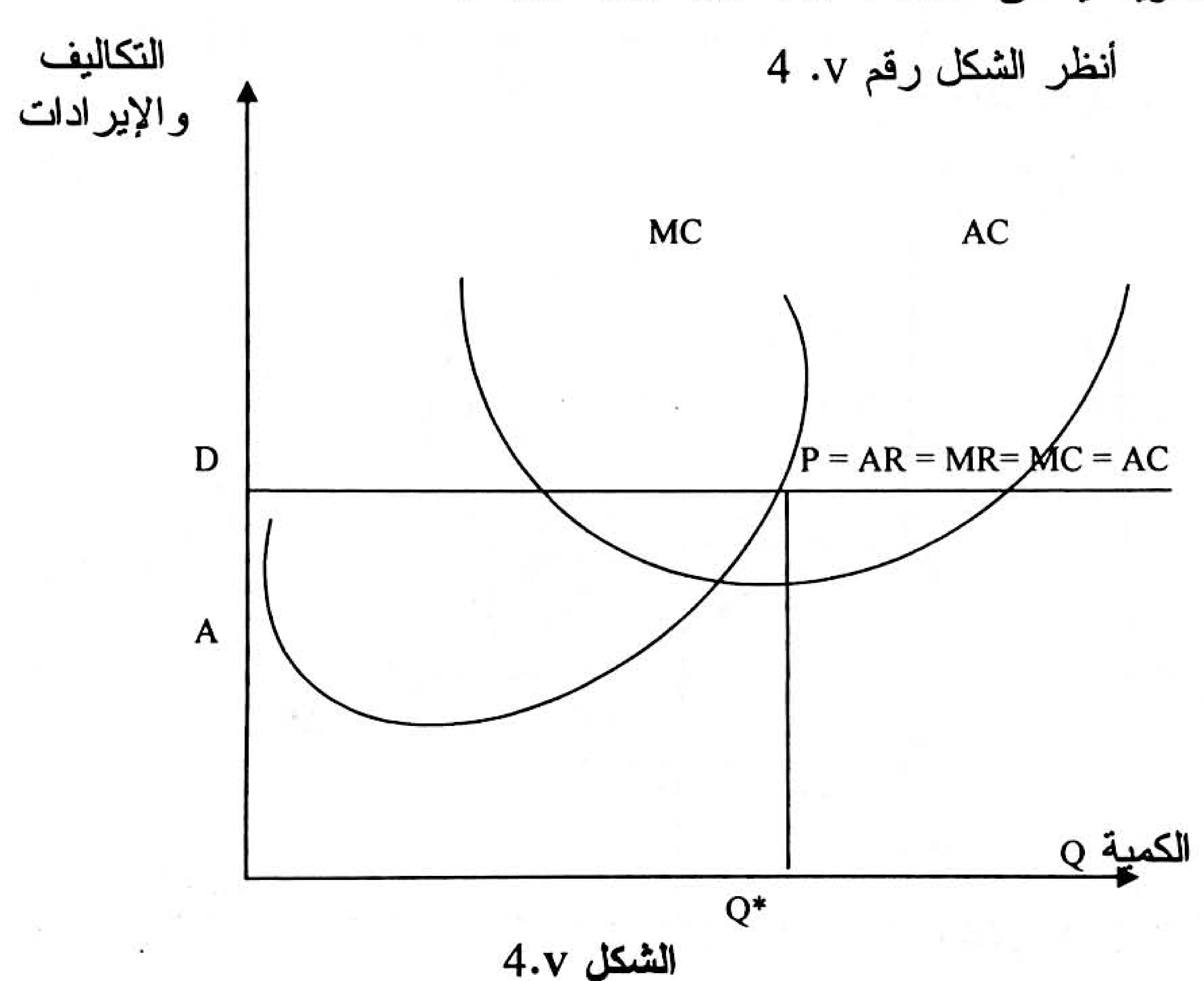
لقد قلنا سابقا أن كل التكاليف تصبح متغيرة في المـــدى الطويـــل لأن المنتج يستطيع تغيير كل عوامل الإنتاج وتصبح دالة التكاليف الكلية.

$$C = h(Q, F) + S(F)$$

فإذا وجد ربح وسطي في الفترة القصيرة فإن هذا الربح يشجع منتجين جدد على دخول السوق في المدى الطويل مما يؤدي إلـــى زيـــادة العـــرض وانخفاض السعر فيزول هذا الربح الوسطي.

أما إذا وجدت خسارة في الفترة القصيرة فإن هذه الخسارة تدفع ببعض المنتجين إلى الخروج من السوق مما يخفض من العرض ويرفع في الســـعر وهذا يؤدي بالتالي إلى زوال الخسارة، نستنتج مما سبق أن التوازن في الفترة الطويلة يتحقق عندما : $P = AR = MR = MC = AC$

أنظر الشكل رقم v. 4




الشكل v.4

**ملاحظة:**

1 ــ لا تؤثر الضريبة القيمية على الأرباح باعتبارها نفقة ثابتة.

2 ــ تؤثر الضريبة النوعية على الأرباح لأنها تفرض بمعدل ثابت على كل وحدة منتجة ويكون الربح.

$$\pi = r(Q) - h(Q) - t(Q) - \overline{F}$$

عندما نشتق دالة الربح بالنسبة لحجم الإنتاج نجد

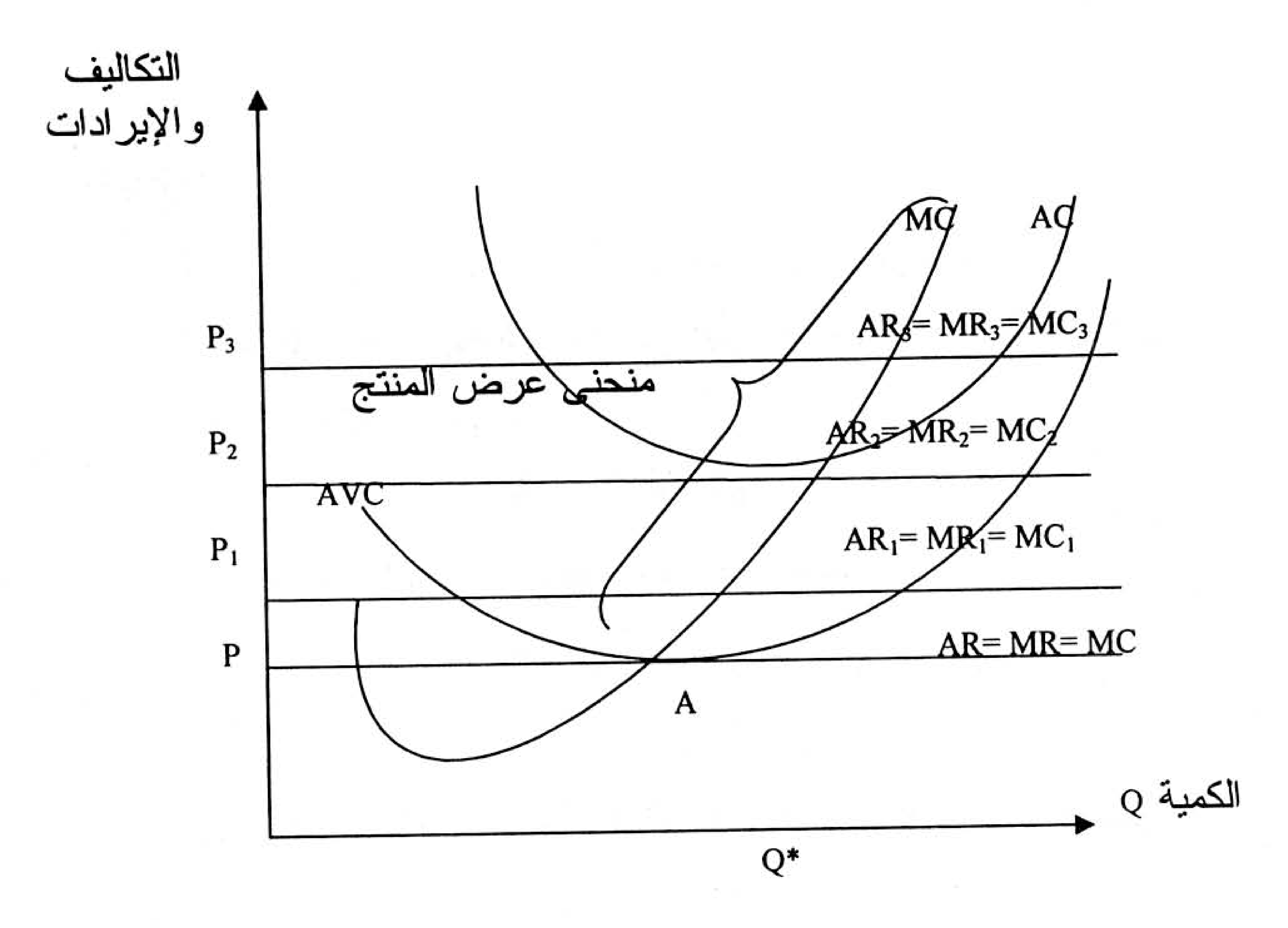
$$\frac{\partial \pi}{\partial Q} = \overline{r}(Q) - \overline{h}(Q) - t = 0$$

$$\overline{r}(Q) = \overline{h}(Q) + t$$

أي أن الإيراد الحدي يساوي التكلفة الحدية مضافا إليها الضريبة ويعني هذا أن الضريبة النوعية تؤثر على الأرباح.

**III ــ اشتقاق منحنى عرض المنتج :**

بعد درسنا الحالات الثلاث لتوازن المنتج والتي تواجهه في الفترة القصيرة نبين من التحليل السابق أن منحنى عرض المنتج هو الجزء الصاعد من منحنى التكلفة الحدية ابتداء من النقطة A التي تمثل أدنى حد للتكلفة المتوسطة المتغيرة لأنه إذا كان الإيراد المتوسط ( السعر ) أقل من أدنى تكلفة متوسطة متغيرة فإن المنتج لن يقوم بالإنتاج على الإطلاق وبالتالي يكون عرضه مساويا للصفر أي ينطبق منحنى العرض في هذه الحالة على المحور الرأسي، أنظر الشكل رقم V . 5




**الشكل v. 5**

أما منحنى عرض السوق فقد تعرضنا له سابقا في نظريـــة العــرض حيث نحصل عليه بجمع منحنيات عرض كل المنتجين.

**مثال** : إذا كان عرض كل منتج حسب الترتيب هو:

$$S_1 = MC_1$$
$$S_2 = MC_2$$
$$S_3 = MC_3$$
$$S_i = MC_i$$

فإن عرض السوق $S = \sum_{i=1}^{n} MC_i$

# الفصل الثاني
# توازن السوق في الفترة الطويلة
# (حالة المنافسة التامة)

لقد رأينا أن توازن المنتج في المدى القصير يتم عندما يتساوي الإيراد المتوسط ( السعر ) مع الإيراد الحدي والتكلفة الحدية.

كما رأينا أن المنتج يواجه ثلاث حالات، إما يحقق ربحا غير عادي أو يحقق ربحا عاديا، أو يدني خسائره إلى أدنى ما يمكن.

وهذه الحالات تدفع بعض المنتجين إلى دخول السوق، وتدفع البعض الأخر إلى الخروج من السوق ومنه لا يكون السوق (مجموع إنتاج المنتجين) في حالة توازن في الفترة القصيرة، أما في الفترة الطويلة فيمكن أن يحقق التوازن.

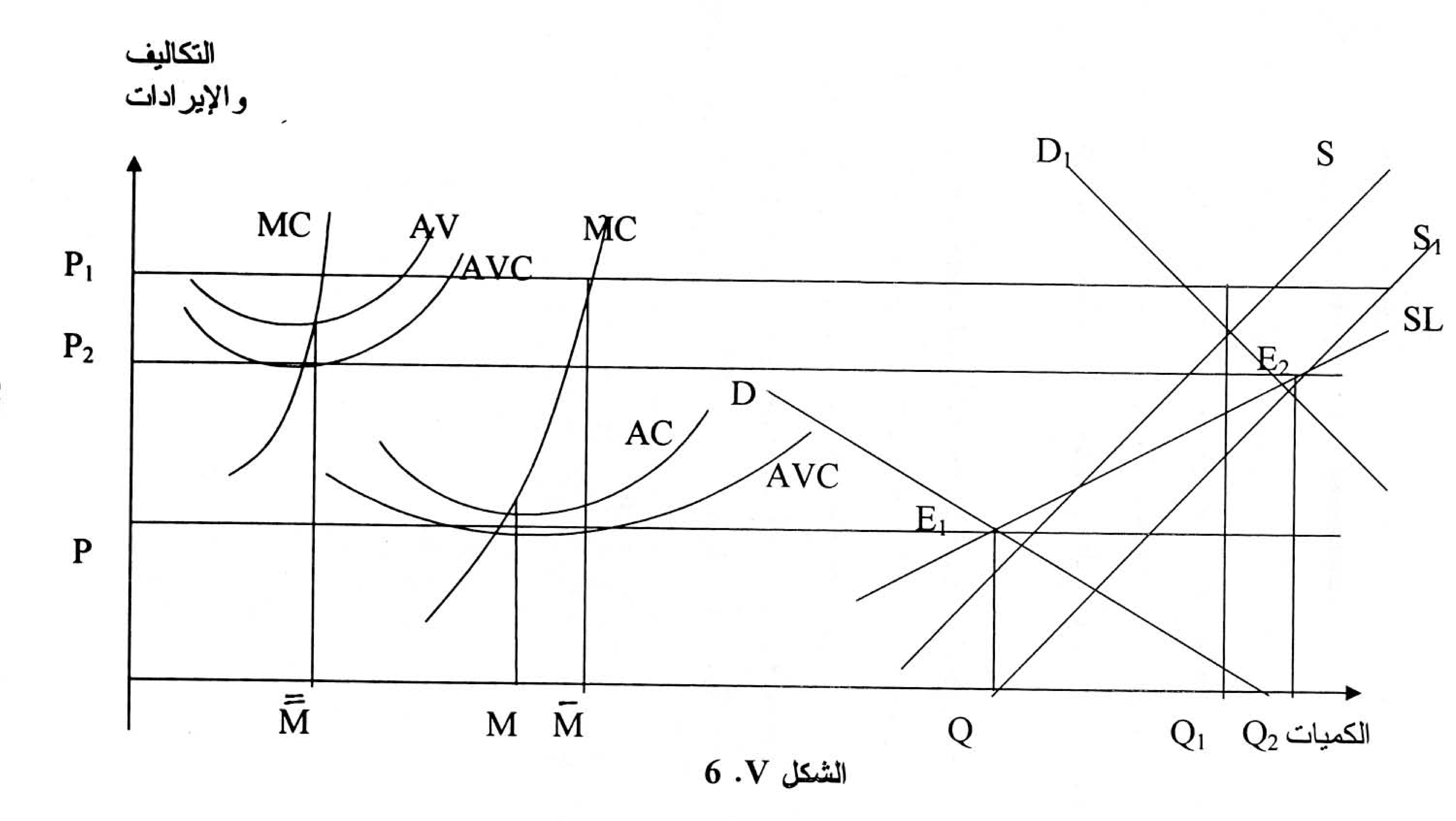
**I ـ منحنى عرض السوق في الفترة الطويلة، حالة وجود تكلفة متزايدة.**

لنفترض سوق في حالة توازن في الفترة الطويلة ومنتج ما في هذا السوق في حالة توازن في هذا الأجل كما نفرض أن دخول المنتجين أو خروجهم يؤثر على أسعار عوامل الإنتاج.

ـ ليكن توازن هذا المنتج ممثلا بالشكل رقم ٧. 6 حيث سعر التوازن وكمية التوازن هما Q.P أي نقطة التوازن هي $E_1$.

ـ نفرض أن الطلب إرتفع وأصبح $D_1$ بسبب أحد العوامل التي تؤثر في العرض ويترتب على ذلك ارتفاع السعر فيصبح $P_1$ تقابله كمية توازن هي $Q_1$ حيث يحقق المنتج ربحا وسطيا مما يشجع عدد من المنتجين على التحول إلى السوق في الفترة الطويلة.

ويترتب عن ذلك زيادة في عرض السوق أي إنتقال منحنى العرض إلى $S_1$.



التكاليف والإيرادات
P1
P2
P
MC
AV
AVC
MC
AC
AVC
D
E1
D1
S
S1
SL
E2
M̿
M
M̄
Q
Q1
Q2 الكميات


الشكل V. 6

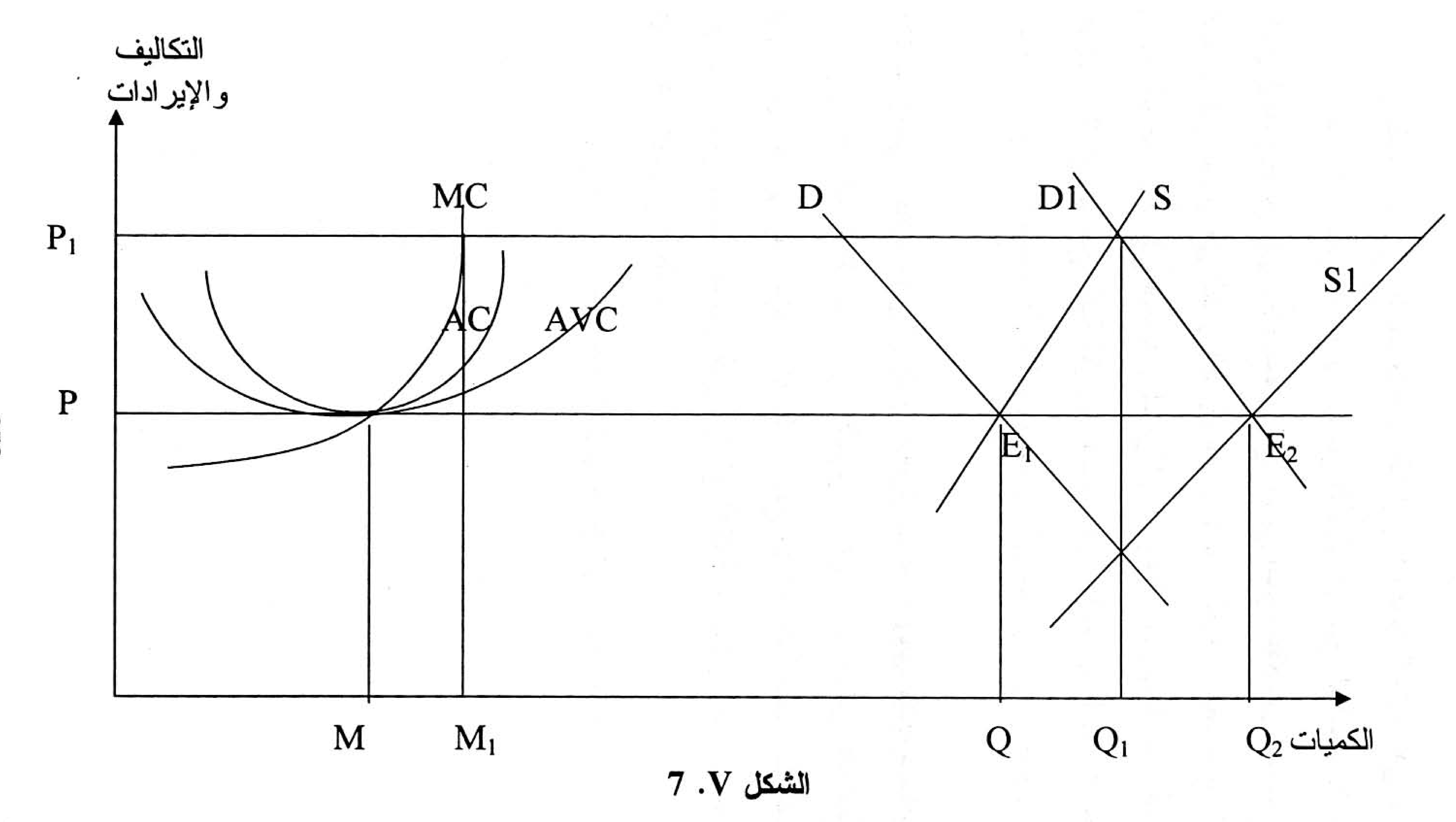
ويلاحظ أن الزيادة في العرض تكون قليلة نسبيا مقارنة بالزيادة في الطلب وهذا بسبب ارتفاع أسعار عوامل الإنتاج نتيجة زيادة الطلب عليها كما أن متوسط التكلفة في المدى الطويل إرتفع.

إن زيادة العرض أدت إلى انخفاض السعر قليلا ليصبح سعر التوازن الجديد هو $P_2$ أقل من $P_1$ وتقابله كمية توازن جديدة $Q_2$ وتصبح نقطة التوازن الجديدة هي $E_2$ نوصل النقطتين $E_2, E_1$ نحصل على منحنى عرض السوق.

## II – منحنى عرض السوق في الفترة الطويلة في حالة وجود تكلفة ثابتة.

في هذه الحالة نفرض أن الدخول والخروج من السوق ليس له تأثير على عوامل الإنتاج مما يفرض ثبات أسعار هذه العوامل.

نفرض تحقق توازن السوق في الأجل الطويل وفي منتج من منتجيها، وليكن توازن المنتج في المدى الطويل ممثل بالشكل رقم V. 7.


التكاليف
والإيرادات
$P_1$
P
MC
AC
AVC
M
$M_1$
D
D1
S
S1
$E_1$
$E_2$
Q
$Q_1$
$Q_2$
الكميات

الشكل 7.V

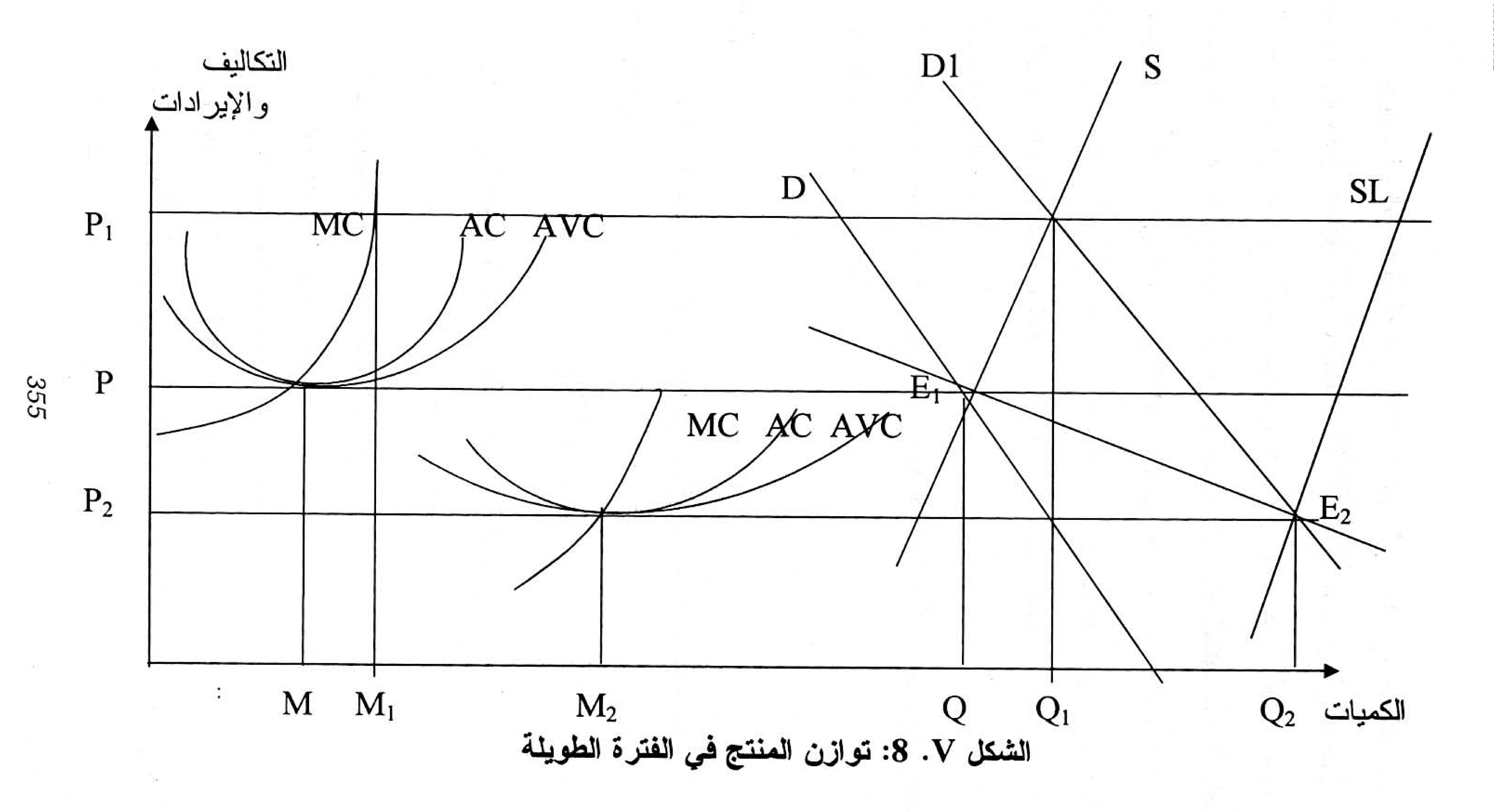
إن نقطة التوازن $E_1$ يقابلها سعر التوازن P وكمية التوازن هي Q.

نفرض أن الطلب إرتفع بسبب من الأسباب فيصبح الطلـــب $D_1$ ممـــا يؤدي إرتفاع السعر إلى $P_1$ ويظهر ربح وسطي يدفع بمنتجـــين جـــدد إلـــى الدخول إلى السوق في المدى الطويل مما يزيد من العرض فيصـــبح $S_1$، إن زيادة العرض أدت إلى إنخفاض السعر إلى P وهذا بســـبب ثبـــات أســـعار عوامل الإنتاج وتصبح نقطة التوازن الجديدة هي $E_2$ يقابلها السعر القـــديم P وكمية التوازن $Q_2$ وبتوصيل $E_1, E_2$ نحصل على منحنى عرض السوق.

**III ـ منحنى عرض السوق في الفترة الطويلة في حالة وجود تكلفة متناقصة.**

في هذه الحالة نفرض توازن السوق وتوازن منتج ضمن هذا الســـوق في الأجل الطويل كما نفرض أنه كلما ارتفع الإنتاج كلما انخفضت أســـعار عوامل الإنتاج بسبب تحسين طرق الإنتاج القائمة أو ابتكار أخـــرى جديـــدة تؤدي إلى تخفيض التكلفة.

الشكل رقم v. 8 يبين حالة توازن المنتج في الفترة الطويلة.




الشكل V. 8: توازن المنتج في الفترة الطويلة

نفرض أن الطلب إرتفع إلى D1 مما أدى إلى إرتفاع السعر حتى أصبح P1 فحقق المنتج ربحا وسطيا يدفع بعدد من المنتجين إلى الدخول في السوق وهذا في المدى الطويل مما يزيد في العرض ونظرا لتطوير طرق الإنتاج التي أدت إلى تخفيض أسعار عوامل الإنتاج انخفضت التكلفة المتوسطة وانتقلت إلى أسفل في المدى الطويل ومن ثم زيادة الإنتاج وزيادة العرض فيصبح S1 ونقطة التوازن الجديدة E1 يقابلها سعر توازن منخفض P2 أقل من P وكمية توازن أكبر هي $Q_2$ وبتوصيل النقطتين E2, E1 نحصل على منحنى عرض السوق.

وفي نهاية هذا العرض نبين أن الحالة الواقعية والأكثر شيوعا هي عندما تكون التكلفة متزايدة.

<u>مثال</u> :

تقوم 100 مؤسسة بإنتاج سلعة في سوق تسودها المنافسة التامة والتكلفة الكلية لكل مؤسسة.

$$C = \frac{500}{6} Q^2$$

وإذا كان الطلب الكلي على هذه السلعة في السوق هو:

$$Q_D = 1200 - \frac{3}{5} P$$

1 ـــ استنبط دالة عرض المؤسسة الواحدة.

2 ـــ استنبط دالة عرض السوق.

3 ـــ أوجد سعر وكمية التوازن في السوق.

4 ـــ عين دالة الإيراد الكلي للمؤسسة.

5 ـــ عين دالة الربح للمؤسسة وأحسبه عندما تكون المؤسسة في حالة توازن.

6 ــ مثل دالة التكلفة الكلية ودالة الإيراد الكلي ودالة الربح بيانيا.

7 ــ مثل دالة التكلفة الحدية ودالة الإيراد الحدي بيانيا.

**الجواب:**

1 ــ بما أن السوق تسودها المنافسة التامة فإن

$$P = MR = MC$$

لدينا: $C = \frac{500}{6}Q^2$ ومنها نجد MC

$$MC = \frac{dc}{dQ} = \frac{(2)(500)}{6}Q = \frac{500}{3}Q$$

لدينا: $P = MC$

أي: $P = \frac{500}{3}Q$

ومنه: $Q = \frac{3}{500}P$ وهي دالة عرض المؤسسة.

2 ــ لدينا 100 مؤسسة في السوق وبالتالي فإن دالة العرض الكلـــي للسلعة هي:

$$Q_S = 100Q_{Si} = 100(\frac{3}{500}P) = \frac{3}{5}P$$

3 ــ يكون السوق في حالة توازن إذا كان الطلب الكلي للسلعة يساوي العرض الكلي لها.

$$Q_B = Q_S \Leftrightarrow 1200 - \frac{3}{5}P = \frac{3}{5}P$$

$$\frac{6}{5}P = 1200 \Rightarrow P = \frac{(1200)(5)}{6} = 1000$$

إذن $P^* = P = 1000$ وهو سعر التوازن.

نعوض عن P بقيمتها في دالة الطلب.

$$Q^* = Q_D = 1200 - \frac{3}{5}P = 1200 - \frac{3}{5}(1000) = 600$$

إذن كمية التوازن هي 600.

$$Q^* = 600$$

4 ـ الإيراد الكلي هو عبارة عن سعر التوازن مضروب في الكمية المباعة وبالتالي فإن صيغة الإيراد الكلي للمؤسسة هي :

$$R = P.Q = 1000Q$$

5 ـ ربح المؤسسة هو الفرق بين الإيراد الكلي والتكلفة الكلية أي:

$$\pi = R - C$$

$$\pi = 1000Q - \frac{500}{6}Q^2$$

تكون المؤسسة في حالة توازن عندما

$$PMR = MC$$

$$1000 = \frac{1000}{6}Q$$

إذن كمية التوازن بالنسبة للمؤسسة هي: Q = 6

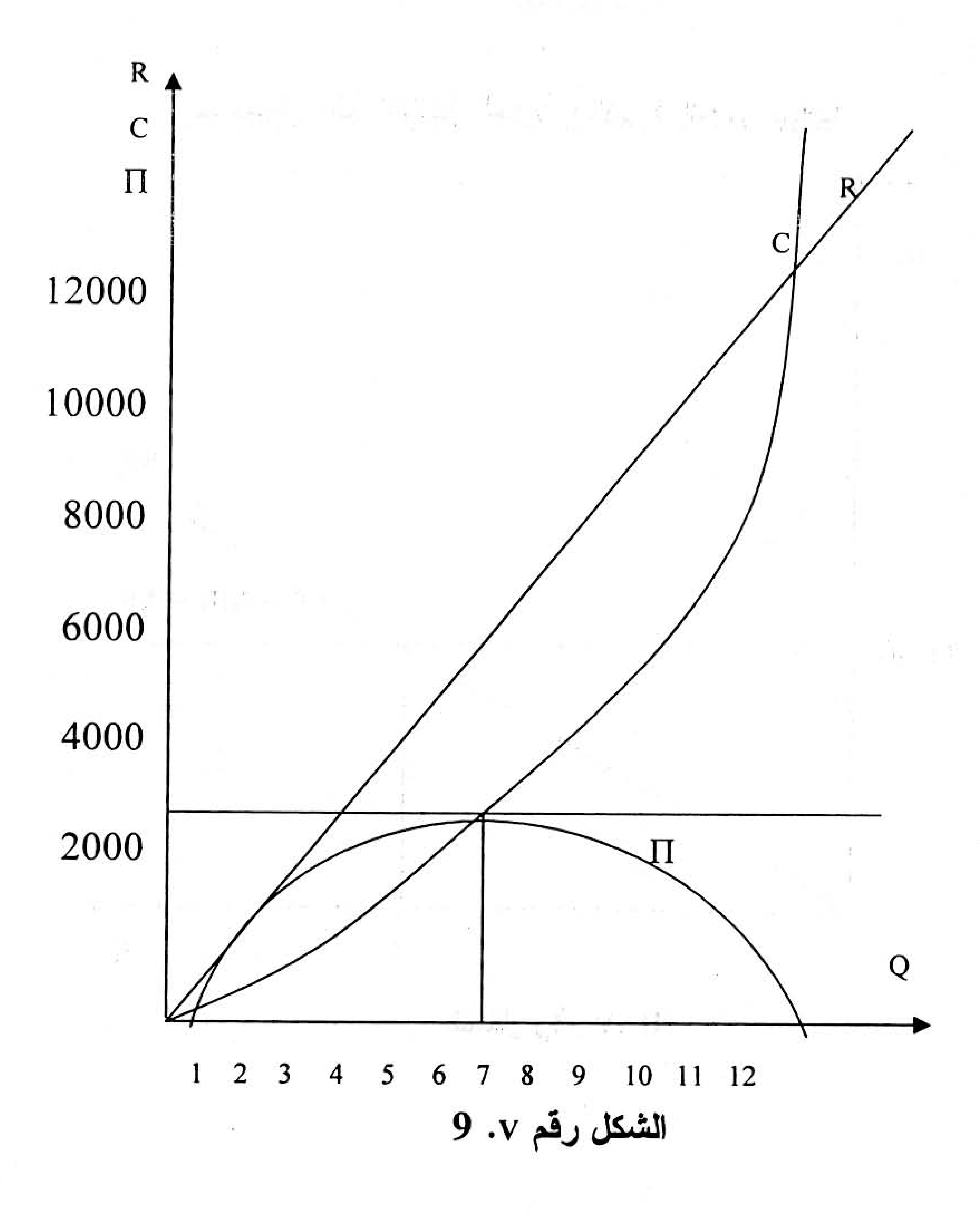
ويكون ربح المؤسسة يساوي:

$$\pi = 1000Q - \frac{500}{6}Q^2$$

$$\pi = 1000(6) - \frac{500}{6}(6)^2$$

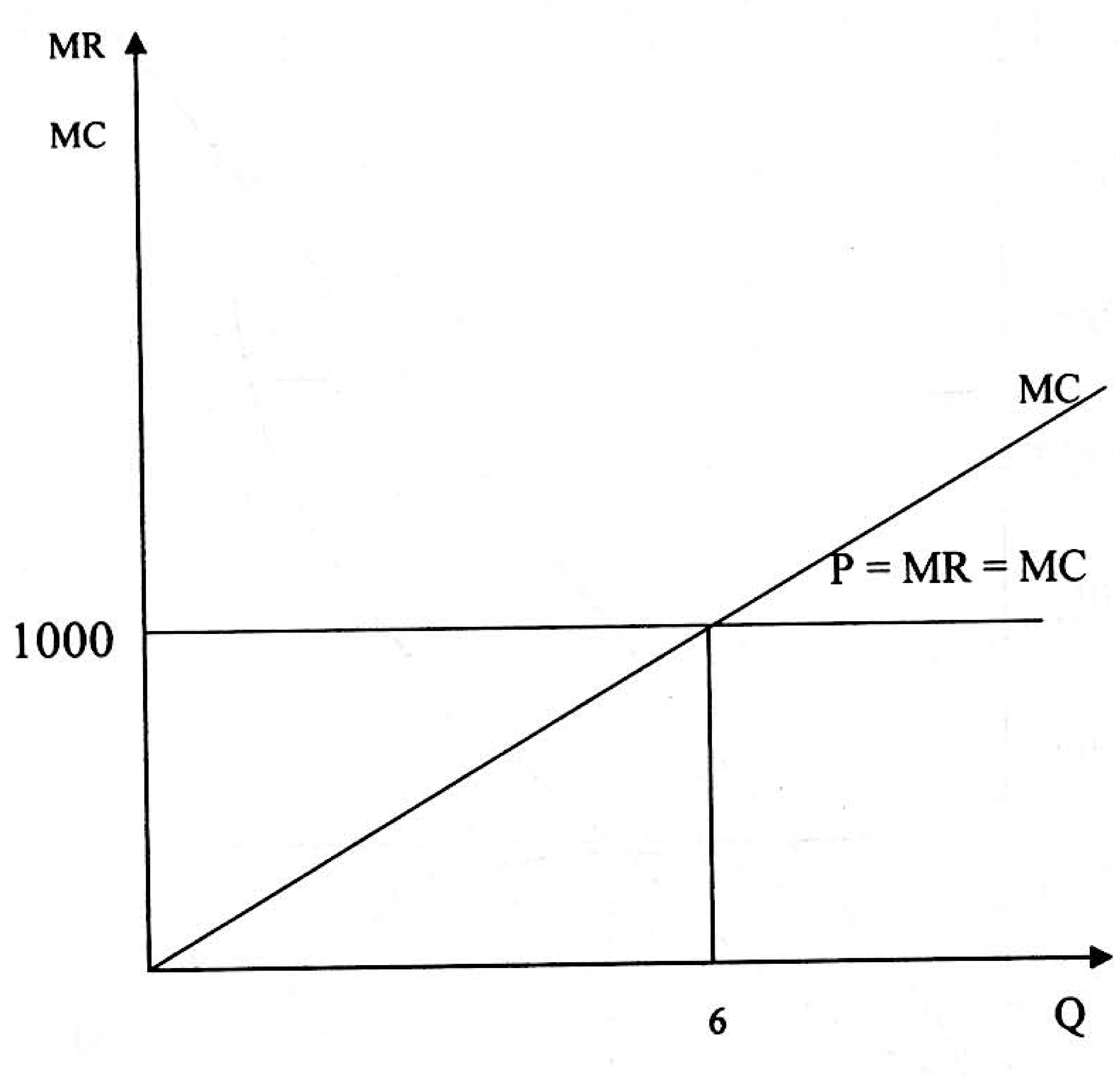
$$\pi = 3000$$

## 6 ـ تمثيل دالة التكلفة الكلية والإيراد الكلي والربح بيانيا :




الشكل رقم v. 9

**7 ـ تمثيل دالة التكلفة الحدية والإيراد الحدي بيانيا :**




**الشكل رقم v. 10**

# الفصل الثالث

# الاحتكار

## I – الإحتكار التام :

يتميز الإحتكار التام بوجود منتج واحد فقط لسلعة معينة لا يوجد لهـا بدائل، ويتحكم هذا المنتج في سعرها أو الكمية المعروضة منهـا فقـط ولا يمكنه التحكم في الإثنين معا، كما أن طلب هذه السلعة قليل المرونة بحيـث يكون خط الإيراد المتوسط ( خط الطلب ) وخط الإيراد الحـدي منحـدران انحدارا سريعا، وميل منحنى الإيراد الحدي يختلف عن ميل منحنى الإيـراد المتوسط.

لدينا الإيراد يساوي :

$$R = P.Q$$

وبالإشتقاق نحصل على الإيراد الحدي:

$$MR = \frac{dR}{dQ} = P + Q = \frac{dP}{dQ}$$

$$MR = P\left[1 + \frac{Q}{P}.\frac{dP}{dQ}\right]$$

$$MR = P\left[1 + \frac{1}{EP}\right]$$

وبما أن EP لها إشارة سالبة فإن $MR \langle P$ إي الإيراد الحدي أصـغر من الإيراد المتوسط.

**توازن المحتكر :**

**الشرط اللازم** : الإيراد الحدي يساوي التكلفة الحدية.

$\frac{dR}{dQ} = \frac{dC}{dQ}$ أي $Mr = Mc$

**الشرط الكافي :**

$$\frac{d^2R}{dQ^2} \langle \frac{d^2C}{dQ^2}$$

وهما نفس الشروط بالنسبة للمنافسة التامة.

**II ـ أسباب الإحتكار :**

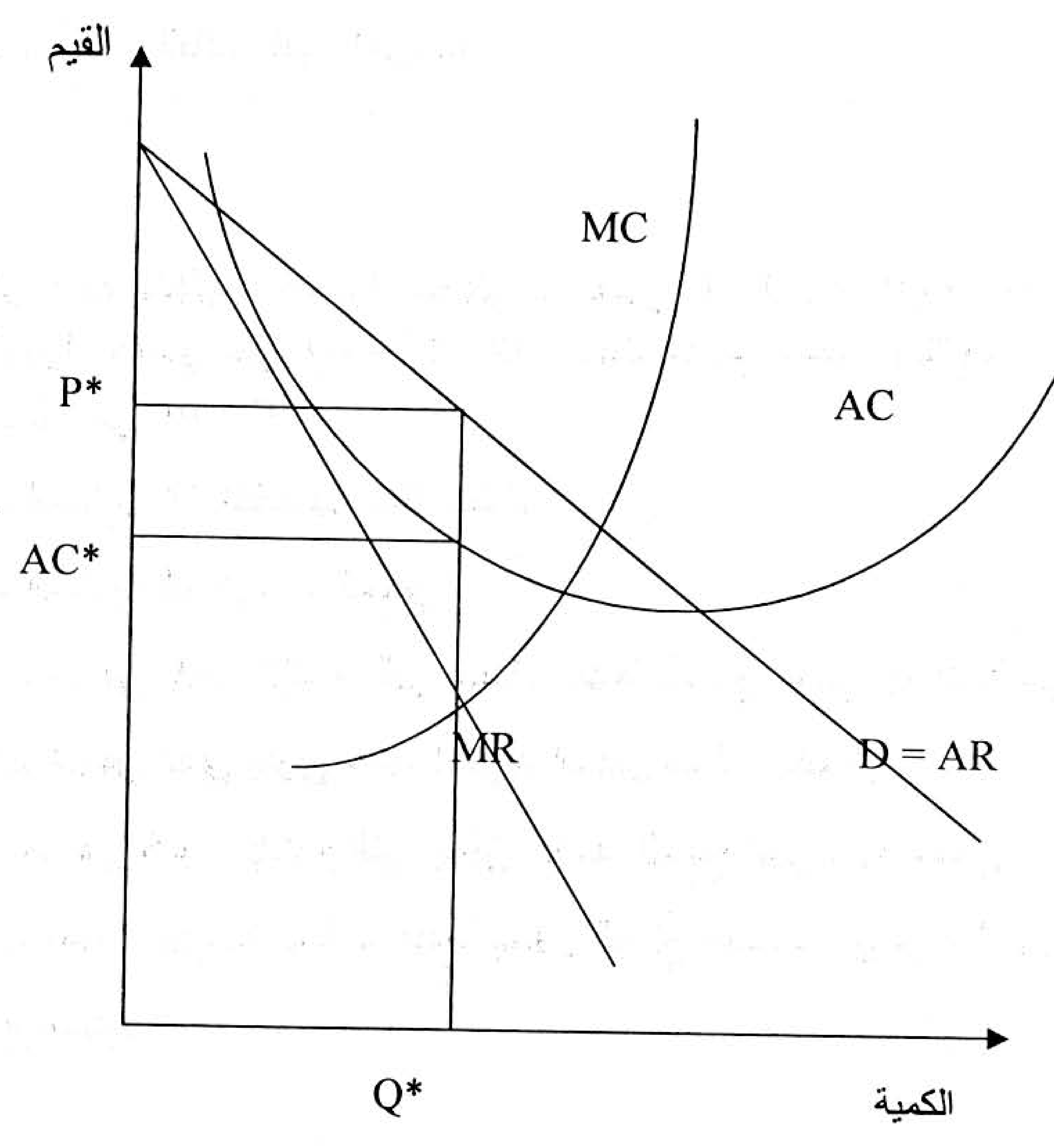
يظهر الإحتكار للأسباب التالية على سبيل المثال لا الحصر :

1 ـ احتكار مؤسسة لإنتاج سلعة بسبب إحتكار مادة أولية تدخل فـي إنتاج هذه السلعة ( إحتكار شراء وإنتاج ).

ب ـ إحتكار مؤسسة لإنتاج سلعة معينة نتيجة براءة الإختراع التـي تمتلكها ( إحتكار إنتاج).

ج ـ إحتكار التجارة الخارجية لحماية الإنتاج الوطني.

د ـ الإحتكار رغبة في تحقيق الوفرات الإقتصادية.




**الشكل رقم ٧. 11**

إلا أننا نستطيع أن نتبين فرقا بين المنتج المحتكر والمنتج في سوق المنافسة التامة، ويتمثل هذا الفرق فيما يلي :

أ ـ في حالة ثبات الغلة لا يمكن تحديد الوضع التوازني لأن منحنى التكلفة الحدية يأخذ شكلا أفقيا مع العلم أن منحنى الإيراد الحدي يأخذ شكلا أفقيا في حالة المنافسة التامة.

ب ـ عندما يسود السوق الإحتكار التام يمكن تحديد الوضع التوازني مهما كان إتجاه منحنى التكلفة الحدية بشرط أن يكون ميل منحنى التكلفة الحدية في حالة هبوطها أقل من ميل منحنى الإيراد الحدي، ويتحقق هذا الأخير عندما يكون الطلب قليل المرونة.

**مثال :**

لتكن دالة التكاليف الحدية لمحتكر ما هي $CM = 6Q^2 - 12Q + 8$ وأن دالة الإيراد الحدي هي $MR = 16 - 4Q$، حيث Q هي حجم الإنتاج، وأن التكاليف الثابتة هي $\overline{F} = 10$.

1 ـ إستنتج دالة التكاليف المتوسطة.

2 ـ إستنتج دالة الإيراد الحدي.

3 ـ ما هي كمية الإنتاج التي يحقق عندها المنتج أقصى إيراد كلي ممكن، وحدد السعر الذي يكون عنده الإيراد الحدي مساويا للصفر.

4 ـ ما هي كمية الإنتاج التي يحقق عندها المنتج أكبر ربح ممكن.

5 ـ أحسب مرونة الطلب عندما يحقق المنتج أقصى إيراد كلي وأقصى ربح ممكن.

**الإجابة :**

1 ــ بما أن التكلفة المتوسطة هي : عبارة عن التكلفة الكلية مقســومة على كمية الإنتاج فإننا نحسب التكلفة الكلية أولا حيث :

التكلفة الكلية = التكلفة المتغيرة + التكلفة الثابتة.

$$TC = VC + \overline{F}$$

ونحن نعرف أن التكلفة المتغيرة في الأجل القصير هي عبــارة عــن تكامل التكلفة الحدية.

$$VC = \int_0^a MC.dQ$$

حيث a هي كمية الإنتاج.

$$VC = \int_0^a (6Q^2 - 12Q + 8)dQ = \left[2Q^3 - 6Q^2 + 8Q\right]_0^a$$

بما أننا نبحث عن التكلفة المتغيرة بدلالة Q إذن :

$$VC = 2Q^3 - 6Q^2 + 8Q$$

وبما أن $\overline{F} = 10$ فإن التكلفة الكلية هي:

$$TC = VC + \overline{F} = 2Q^3 - 6Q^2 + 8Q + 10$$

والتكلفة المتوسطة هي:

$$ATC = \frac{TC}{Q} \Rightarrow ATC = \frac{2Q^3 - 6Q^2 + 8Q + 10}{Q}$$

2 ــ الإيراد الكلي هو عبارة عن تكامل الإيراد الحدي وبنفس الطريقة السابقة نحسب الإيراد الكلي.

$$R = \int_0^a MR.dQ = \int_0^a 16 - 4Q$$

$$R = 16Q - 2Q^2$$

ولا يوجد ثابت لأنه عندما تكون Q = O أي عدم بيع أي وحــدة فــإن الإيراد الكلي يكون معدوما.

3 ــحساب كمية الإنتاج التي يحقق عندها أقصى إيراد كلي.

<u>الشرط اللازم</u> : يصل الإيراد الكلي إلى نهايته العظمى عنـــدما MR= 0 أي الإيراد الحدي يساوي الصفر.

$$MR = \frac{dR}{dQ} = 16 - 4Q = 0 \Rightarrow Q = 4$$

<u>الشرط الكافي</u> :

$$\frac{d^2R}{dQ^2} = -4 \langle 0$$

وهذا يدل على النهاية العظمى أي عند إنتاج 4 وحدات يحقق المنـــتج أقصى إيراد كلي.

بما أن $R = P.Q = 16Q - 2Q^2$

فإن $P = 16 - 2Q$

وحيث يكون الإيراد الحدي معدوما عندما Q = 4 فإن السـعر الـذي يكون عنده الإيراد الحدي مساويا للصفر هو :

$$P = 16 - 2(4) = 8$$

وبالتالي أقصى إيراد كلي هو :

$$R = 8.(4) = 16(4) - 2(4)^2 = 32$$

4 ــ كمية الإنتاج التي يحقق عندها المنتج أكبر ربح ممكن :

يحقق المنتج المحتكر أقصى ربح ممكن عندما:

$$MR = MC$$

$$16 - 4Q = 6Q^2 - 12Q + 8$$

$$6Q^2 - 8Q - 8 = 0$$

$$(6Q + 4)(Q - 2) = 0$$

$$6Q + 4 \frac{-2}{3} = 0$$

أما $6Q + 4 = 0$ وبالتالي $Q = \frac{-2}{3}$

وهذه كمية سالبة مرفوضة.

أو O = 2 - Q وبالتالي Q = 2 وهي الكمية التي تحقق للمنتج أكبر ربح ممكن.

أما الربح فيمكن حسابه حسب:

$$\pi = R - C = 2Q^3 + 4Q^2 + 8Q - 10$$

وبما أن Q = 2 فإن $\pi = 6$ وهي أقصى ربح ممكن يحققه المحتكر.

5 ــ مرونة الطلب عندما يحقق المنتج أقصى إيراد كلي :

$$ER = \frac{MR}{AR} = (1 - \frac{1}{EP})$$

بما أن MR = 0 فإن:

$$1 - \frac{1}{EP} = 0 \Rightarrow EP = -1$$

أي أن الطلب متكافئ المرونة.

ــ مرونة الطلب عندما يحقق المنتج أقصى ربح ممكن.

$$\frac{MR}{AR} = \frac{16-4Q}{16-2Q} = (1 + \frac{1}{EP})$$

وبما أن Q = 2 فإن:

$$\frac{MR}{AR} = \frac{16-4(2)}{16-2(2)} = (1 + \frac{1}{EP})$$

$$\frac{8}{12} = (1 + \frac{1}{EP})$$

$$\frac{2}{3} = (1 + \frac{1}{EP}) \Rightarrow 2(EP+1) \Rightarrow 2EP - 3EP = -3$$

$EP = -3$ طلب مرن.

**III – تمييز السعر :**

إذا واجه المنتج أسواق لسلع ذات درجات مرونة مختلفة فإنه يتبع سياسة تمييز السعر حيث يبيع السلعة بأسعار مختلفة حتى تزيد أرباحه.

لكي يقوم المحتكر بتمييز السعر يجب أن تتوفر شروط معينة في السوق نجمل أهمها فيما يلي :

1 – انفصال الأسواق عن بعضها البعض بسبب العوامل الطبيعية أو الجمركية.

2 – أن تكون مرونة الطلب في الأسواق مختلفة.

3 – تساوي الإيراد الحدي في الأسواق المختلفة بالرغم من سياسة تمييز السعر وهذا راجع إلى المرونات المختلفة للطلب ما بين الأسواق.

4 – إذا كان الإيراد الحدي في السوق الأولى هو $MR_1$ والإيراد الحدي في السوق الثانية هو $MR_2$ فإن $MR_1 = MR_2$.

أي:

$$P_1(1+\frac{1}{Ep_1}) = P_2(1+\frac{1}{Ep_2})$$

ومنه:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1+\frac{1}{Ep_2}}{1+\frac{1}{Ep_1}}$$

حيث $E_{P1} \langle 0, \quad E_{P2} \langle 0$

من العلاقة السابقة يتضح أن السعر يكون منخفضا في السوق التي تزيد فيها مرونة الطلب ويكون مرتفعا في السوق التي تقل فيها مرونة الطلب.

**توازن المحتكر في ظل سياسة تميز السعر :**

نفرض دالة التكاليف هي :

$$C = f(Q) = f(Q_1 + Q_2)$$

والإيراد هو $R = R_1 + R_2$ حيث R1 يمثل إيراد السوق الأولى و R2 يمثل إيراد السوق الثانية.

وبالتالي فإن الربح يساوي: $\pi = (R_1 + R_2) - C$

**الشرط اللازم لتعظيم الربح :**

في السوق الأولى: $\frac{\partial n}{\partial Q_1} = 0$

$$\frac{\partial n}{\partial Q_1} = \frac{\partial R_1}{\partial Q_1} - \frac{\partial C}{\partial Q_1} = 0$$

ومنه نجد $\frac{\partial R_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial C}{\partial Q_1} = MR_1 = MC_1$

في السوق الثانية : $\frac{\partial n}{\partial Q_2} = 0$

$$\frac{\partial n}{\partial Q_2} = \frac{\partial R_2}{\partial Q_2} - \frac{\partial C}{\partial Q_2} = 0$$

ومنه نجد $\frac{\partial R_2}{\partial Q_2} - \frac{\partial C}{\partial Q_2} = MR_2 = MC_2$

وحيث $MC_1 = MC_2 = MC$ فإن الشرط اللازم لتعظيم الربح في السوقين معا هو:

$$MC = MR_1 = MR_2$$

أي الإيراد الحدي في كل سوق يساوي التكلفة الحدية للإنتاج ككل.

**<u>الشرط الثاني لتعظيم الربح :</u>**

لكي يكون الربح أعظمي يجب أن تكون المحددات الرئيسية للمحدد الهيسي متبادلة الإشارة ومبتدئة بالسالبة، مثال ذلك في حالتنا السابقة : المحدد الهيسي هو :

$$\begin{vmatrix} R_1'' & -C'' & -C \\ -C'' & R_2'' & -C \end{vmatrix}$$

والمحددات هي :

$$R_1'' - C'' \langle 0, (R_1'' - C'')(R_2'' - C'') - (C'')^2 \rangle 0$$

**<u>مثال :</u>**

إذا كانت دالة الطلب التي تواجه المحتكر تساوي :

دالة الطلب الكلي : $P = 100 - 2Q$

دالة الطلب في السوق الأولى :

$$P_1 = 80 - 2.5Q_1$$

دالة الطلب في السوق الثانية :

$$P_2 = 180 - 10Q_2$$

حيث:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

ودالة التكلفة الكلية هي: $C = 50 + 40Q$

**<u>المطلوب :</u>**

1 ــ ما هو الربح الأعظمي في حالة وجود سوق واحدة بدالة طلب كلي.

2 ـــ حساب سعر وكمية التوازن في السوقين وحساب قيمـــة الـــربح الأعظمي.

3 ـــ ما الفرق بين قيمتي الربح وماذا يمكننا أن نستنتج.

**الإجابة:**

1 ـــ في حالة وجود سوق واحدة بدالة طلب كلية:

$$P = 100 - 2Q$$

يكون الإيراد الكلي يساوي:

$$R = P.Q = (100 - 2Q).Q = 100Q - 2Q^2$$

ويكون الإيراد الحدي مساويا:

$$MR = \frac{dR}{dQ} = 100 - 4Q$$

وتكون التكلفة الحدية مساوية:

$$\frac{dC}{dQ} = 40$$

ويكون المحتكر متوازنا عندما الإيراد الحدي يساوي التكلفة الحدية.

$$MR = MC$$

أي: $100 - 4Q = 40 \Rightarrow Q = 15$

وبالتالي فإن سعر السوق يساوي :

$$P = 100 - 2Q = 100 - 2(15) = 70$$

ويكون ربح المحتكر يساوي:

$$\pi = R - C = P.Q = (50 + 40Q)$$

$$\pi = (70.15) - [50 + (40.15)]$$

$$\pi = 400$$

**2 ـ في حالة وجود سوقين :**

**السوق الأولى :**

الإيراد الكلي في السوق الأولى :

$$R_1 = P_1.Q_1 = (80 - 2,5Q_1)Q_1 = 80Q_1 - 2,5Q_1^2$$

الإيراد الحدي في السوق الأولى :

$$MR_1 = \frac{dR_1}{dQ_1} = 80 - 5Q_1$$

**السوق الثانية :**

الإيراد الكلي في السوق الثانية.

$$R_2 = P_2.Q_2 = (180 - 10Q_2)Q_2 = 180Q_2 - 10Q_2^2$$

الإيراد الحدي في السوق الثانية :

$$MR_2 = \frac{dR_2}{dQ_2} = 180 - 20Q_2$$

**التكلفة الحدية للإنتاج ككل :**

دالة التكلفة هي :

$$C = 50 + 40Q$$

التكلفة الحدية تساوي :

$$MC = \frac{dc}{dQ} = 40$$

نلاحظ أنه لدينا معادلتين آنيتين كل واحدة بمجهول.

$$MR_1 = MC$$
$$MR_2 = MC$$

أي:

$$80 - 5Q_1 = 40 \Rightarrow Q_1 = 8$$
$$180 - 20Q_2 = 40 \Rightarrow Q_2 = 7$$

ـ إذا كانت كمية التوازن في السوق الأولى هي $Q_1 = 8$ فإن سعر التوازن في هذه السوق يساوي :

$$P_1 = 80 - 2{,}5Q_1 = 80 - 2{,}5(8) = 60$$

ـ إذا كانت كمية التوازن في السوق الثانية هي $Q2 = 7$ فإن سعر التوازن في هذه السوق يساوي:

$$P_2 = 180 - 10Q_2 = 180 - 10(7) = 110$$

ـ الحجم الكلي لكميتي التوازن هو :

$$Q = Q_1 + Q_2 = 8 + 7 = 15$$

ـ دالة الربح هي:

$$\pi = R_1 + R_2 - C$$

$$\pi = (P_1.Q_2) + P_2.Q_2) - (50 + 40Q)$$

$$\pi = (60.8) + (110.7) - (50+ 40.15)$$

$$\pi = 500$$

3 ـ في حالة وجود تمييز في السعر فإن الربح يكون أكبر من الربح في حالة سوق واحدة دون تمييز في السعر.

**<u>إستنتاج</u> :**

لدينا :

$$E_{d1} = \frac{VQ_1}{\partial P_1}.\frac{P_1}{Q_1} = (-0{,}4)\frac{60}{8} = -3$$

$$E_{d2} = \frac{\partial Q_2}{\partial P_2}.\frac{P_2}{Q_2} = (-0{,}1)\frac{110}{7} = -1{,}57$$

بما أن المرونة في السوق الأولى أكبر من المرونة في السوق الثانية فإن المحتكر يفرض سعر أصغر في السوق الأولى عن السوق الثانية.

# مراجع الجزء الأول

## أولا: المراجع باللغة العربية:

1 ـــ محمد علي الليثي، التحليل الاقتصادي، الإسكندرية، دار الجامعات العربية المصرية، 1975.

2 ـــ محمد إبراهيم العزلان، مبادئ الاقتصاد، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، 1975.

3 ـــ إسماعيل محمد هاشم، مبادئ الاقتصاد التحليلي، بيروت، دار النهضة العربية 1978.

4 ـــ محمود يونس محمد، عبد النعيم محمد مبارك، أساسيات علم الاقتصاد، بيروت، الدار الجامعية، 1985.

5 ـــ أحمد جامع، النظرية الاقتصادية، الجزء الأول، التحليل الاقتصادي الجزئي، القاهرة، دار النهضة العربية، الطبعة الخامسة، 1986.

6 ـــ د. نعمت الله نجيب إبراهيم، أسس علم الاقتصاد، الاسكندرية، مؤسسة شباب الجامعة 1987.

## ثانيا: المراجع باللغة الفرنسية

1 – Amani ( Mokhtar), Microéconomie, théories critiques et exercices pratiques, Quebec caëtan Morin 1981.

2 – Cedras (Jacques), Analyses microéconomie, Paris, Dalloz 1981

3 – Guerrien (Bernard), Micro économie et calcul économique. Paris, Economica 1982.

4 – Abraham Frois (Gilber), Microéconomie, Paris Economica 1986.

5 – Bernier (B), Microéconomie, Exercices et corrigés, Paris Dunod 1986.

# الباب السادس

# تسعير عوامل الإنتاج

# (نظرية التوزيع)

**تمهيد :**

لقد بينا سابقا السلوك الرشيد للمنتج، يحتم عليه مزج عوامل الإنتـــاج بالطريقة التي تعطيه أقل تكلفة ممكنه للحصول على حجم إنتاج معـــين، أو أكبر إنتاج ممكن بتكاليف معينة، ويقوم المنتج عند المزج بـــإحلال عوامـــل الإنتاج ذات الإنتاجية المرتفعة نسبيا محل عوامـــل الإنتـــاج ذات الإنتاجيـــة المنخفضة نسبيا حتى يحصل على الأهداف التي وضعها، ويطلـــب المنـــتج عوامل الإنتاج لاستخدامها في إنتاج سلع تقوم بالإشباع المباشر للحاجـــات، ولهذا يعتمد طلب عوامل الإنتاج على إنتاجيتها الحدية.

يعتمد تسعير عوامل الإنتاج على تفاعل قوى العرض والطلـــب فـــي سوقين هما :

سوق عوامل الإنتاج، وسوق السلع التي تشارك هـــذه العوامـــل فـــي إنتاجها، وللعوامل غير الإقتصادية تأثير في تسعير عوامل الإنتـــاج، ومنهـــا العقيدة، والعوامل الإنسانية والأنماط السياسية والإجتماعية والثقافية، ويمكننا أن نجمع بعض الملاحظات المتعلقة بالطلب على عوامل الإنتاج في ما يلي :

أ ـــ إذا كان الطلب على السلع الإستهلاكية مرنا، يكون الطلب علـــى عوامل الإنتاج المستخدمة في إنتاجيها مرنا.

ب ـــ إذا كانت تكاليف العامل الإنتاجي تمثل نسبة ضئيلة من التكاليف الكلية لإنتاج السلعة، فإن الطلب على هذا العامـــل الإنتـــاجي غيـــر مـــرن، والعكس إذا كانت تمثل نسبة كبيرة.

ج ـــ تزداد مرونة العامل الإنتاجي كلما كان من الســـهولة أن تحـــل محله عوامل إنتاجية أخرى.

د ــ إذن نستطيع القول بأن الطلب على العامل الإنتاجي يتوقف علــى الجوانب الفنية للإنتاج، و كذلك يتوقف على طلب السلعة التي يشترك العامل الإنتاجي في إنتاجها.

في هذا الباب سنتناول ثلاث فصول هي :

ــ الطلب على عوامل الإنتاج.

ــ عرض عوامل الإنتاج.

ــ تحديد أسعار خدمات عوامل الإنتاج.



# الفصل الأول

# الطلب على عوامل الإنتاج

يتحدد طلب المؤسسة المفردة على عاملي الإنتاج بالجمع بين العلاقة الفنية للإنتاج ( دالة الإنتاج ) وعلاقة السوق ( دالة الطلب على الإنتـــاج )، حيث تحاول المؤسسة المفردة الحصول على الحـــد الأعلـــى مـــن الـــربح $\pi = R - c$.

أي : $\pi = P.f(1,K) - P_1 L - P_K.K$

**<u>شروط الدرجة الأولى</u>** : من شروط الدرجة الأولى يمكننا إيجاد دالـــة الطلب على عامل الإنتاج.

**<u>I ـــ إيجاد دالة الطلب على العمل</u>** :

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = P.\frac{\partial f}{\partial L} + f(1,K)\frac{\partial P}{\partial L} - P_L = 0$$

لدينا:

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \frac{\partial P}{\partial Q}.\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial P}{\partial Q}.\frac{\partial f}{\partial L}$$

وبالتعويض عنها في المعادلة السابقة نجد:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = P.\frac{\partial f}{\partial L} + f(1,K)\frac{\partial P}{\partial Q}.\frac{\partial f}{\partial L} - P_L = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = P.\frac{\partial f}{\partial L} + f(1,K)\frac{\partial f}{\partial L}.\frac{\partial P}{\partial Q} - P_1 = 0$$

ومنه: $P_L = P.\frac{\partial f}{\partial 1} + f(1,K)\frac{\partial f}{\partial L}.\frac{\partial P}{\partial L}$

تدل هذه المعادلة على دالة طلب المؤسسة المفردة على العمـــل، وإذا كان سعر السلعة المنتجة ثابتا فإن $\frac{\partial P}{\partial Q} = 0$ وبالتالي فإن $P_L = P.\frac{\partial f}{\partial L}$

ويمثل الجانب الأيمن من دالة الطلب على العمل إيراد الإنتاجية الحدية وهنا يمكننا التفريق بين مفهومين هما :

**1 ـ إيراد الإنتاجية الحدية ( إيراد الناتج الحدي MRP ).**

هو التغير في قيمة الإيراد الكلي نتيجة تشغيل وحدة إضافية من عامل الإنتاج المتغير ونرمز له بما يلي :

إذا كان إيراد الإنتاجية الحدية للعمل نكتب $MRP_L$ أما إذا كان إيـــراد الإنتاجية الحدية لرأس المال نكتب $MRP_K$ .

**2 ـ قيمة الناتج الحدي VMP :**

هو القيمة النقدية للإنتاج العيني الحدي للعامل المتغير مقومـــا علـــى أساس سعر السوق.

والجدير بالملاحظة هو ظهور الفرق بين إيراد الناتج الحدي، وقيمـــة الناتج الحدي في حالة الإحتكار في سوق إنتاج السلعة لأن السعر يختلف عن الإيراد الحدي. $P \neq MR$

أما إذا سادت المنافسة التامة سوق إنتاج السلعة فإن $p = MR$

وبالتالي تتساوى قيمة الناتج الحدي مع إيراد الناتج الحـــدي ويـــزول الفرق بينهما.

**II ـ إيجاد دالة الطلب على رأس المال :**

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = P.\frac{\partial f}{\partial K} + f(1,K)\frac{\partial P}{\partial K} - P_K = 0$$

ولدينا:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{\partial P}{\partial Q}.\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial P}{\partial Q}.\frac{\partial f}{\partial K}$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = P.\frac{\partial f}{\partial L} + f(1,K)\frac{\partial f}{\partial 1}.\frac{\partial P}{\partial Q} - P_K = 0$$

$$P_K = P.\frac{\partial f}{\partial 1} + f(1,K)\frac{\partial f}{\partial 1}.\frac{\partial P}{\partial Q}$$

تدل هذه المعادلة على دالة طلب المؤسسة المفردة على رأس المال،

وإذا كان سعر السلعة المنتجة ثابتا فإن $\frac{\partial P}{\partial Q} = 0$ وبالتالي $P_K = P.\frac{\partial f}{\partial K}$

ونفس الملاحظة التي لاحظناها بالنسبة لإيراد الناتج الحدي وقيمة الناتج الحدي للعمل نلاحظها هنا بالنسبة لرأس المال.

# الفصل الثاني

# عرض عوامل الإنتاج

## عرض عوامل الإنتاج :

تتفق منحنيات عرض عوامل الإنتاج مع منحنى عرض السلعة من حيث الشكل، وتختلف من حيث المضمون؛ لأن منحنى عرض السلعة يعكس تكاليف إنتاجها وسنتناول في هذا الفصل عرض أحد عوامل الإنتاج وهو العمل وهو عبارة عن خدمة محل التبادل في سوق العمل ومرتبطة بالعنصر البشري؛ وبالتالي مرتبطة بالسلوك البشري المتأثر بالأنماط السياسية والإجتماعية والثقافية والعقائدية، كما يخضع للمفاضلة مع وقت الفراغ.

### I – الدخل والراحة ( أوقات الفراغ ) بالنسبة للفرد :

يمثل دخل المستهلك قيمة العمل الذي قام به هذا المستهلك، وبما أن دالة المنفعة هي عبارة عن تابع لمجموعة من المتغيرات من بينها الدخل الذي يعبر عن قيمة العمل، فإننا نستطيع إشتقاق أكبر كمية من العمل التي يمكنه القيام بها من عمليات إيجاد الحد الأعظمي للمنفعة الكلية.

نفرض أن تابع المنفعة هو $U = f(W, R)$ بحيث :

ترمز W إلى وقت الفراغ من العمل وترمز R إلى دخل المستهلك، حيث يرغب الفرد المستهلك في كل من الدخل ووقت الفراغ W.

نفرض أن المستهلك يقوم بشراء السلع المختلفة بأسعار ثابتة وأن الدخل سوف يعامل على أنه يمثل القوة الشرائية ( الدخل الحقيقي ).

نفرض أن T تمثل الوقت المتوفر للمستهلك ( العامل ) حيث يمثل هذا الوقت مجموع الوقتين وقت العمل L ووقت الفراغ W.

$T = W + L$ وبالتالي $W = T - L$

كما أن $R = P_L.L$ حيث $P_L$ هو معدل الأجر الحقيقي.

ومنه تابع المنفعة $U = f(W, R) = f(T - L, P_L.L)$

للحصول على الحد الأعلى لتابع المنفعة تشتقها بالنسبة للعمل.

$$\frac{\partial U}{\partial L} = -f_1 + f_2 P_L = 0 \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} = P_L$$

وبما أن معدل تعويض الدخل بوقت الفراغ من العمل الناتج عن تفاضل R بالنسبة إلى وقت الفراغ W هو $\frac{-dR}{dw} = \frac{f_1}{f_2} = P_L$ وتمثل منحنى عرض المستهلك للعمل. وهي تدل على أن معدل تعويض الدخل بوقت الفراغ من العمل يساوي معدل الأجر الحقيقي، فكلما إرتفع معدل الأجر النسبي لساعة العمل يعني هذا إرتفاع لمعدل الأجر النسبي لساعة الفراغ المضحى بها ولذا يضحي العامل بساعة فراغ مقابل زيادة في الدخل بمقدار معدل الأجر النسبي لساعة العمل، وبما أن دخل المستهلك هو عبارة عن قيمة العمل الذي قام به فإنها تعطينا بطريقة غير مباشرة منحنى الطلب بالنسبة لدخل المستهلك.

أما شروط الدرجة الثانية ( الشرط الكافي لتعظيم دالة المنفعة ) فهي :

$$\frac{d^2U}{dL^2} = f_{11} - 2f_{12}P_L + f_{22}P_L^2 \langle 0$$

**II ـ العرض الكلي للعمل ( عرض السوق ).**

يدل العرض الكلي للعمل على مختلف الكميات من العمل التي يكون أصحابها مستعدين لبيعها في سوق العمل خلال مدة معينة وعند الأسعار المختلفة الممكنة.

فإذا كان عرض الفرد هو $S_{Li}$ فإن عرض السوق هو:

$$S_L = \sum_{i=1}^{n} S_{Li}$$

# الفصل الثالث

# تحديد أسعار خدمات عوامل الإنتاج

تحدد أسعار خدمات عوامل الإنتاج تفاعل قوى العرض والطلب في أسواق عوامل الإنتاج، أي حسب ظروف السوق الخاصة بكل عامل إنتاجي وسنتناول في هذا الفصل ثلاث حالات هي :

1 ـ حالة المنافسة التامة تسود سوق عوامل الإنتاج وسوق السلعة المنتجة.

2 ـ حالة المنافسة التامة تسود سوق عوامل الإنتاج والإحتكار يسود سوق السلعة المنتجة.

3 ـ حالة إحتكار الشراء يسود سوق عوامل الإنتاج.

كما أننا سنقتصر على عنصر العمل في هذا الفصل.

## I ـ حالة المنافسة التامة تسود سوق عوامل الإنتاج وسوق السلعة المنتجة :

يكون سوق عوامل الإنتاج تنافسيا تاما إذا توفرت فيه الميزات التالية :

أ ـ العامل الإنتاجي متجانس وكان المشترون المختلفون غير مميزين من جهة نظر البائع.

ب ) ـ تعدد البائعين والمشترين.

ج ) ـ يمتلك البائعون والمشترون المعلومات الكاملة عن السوق.

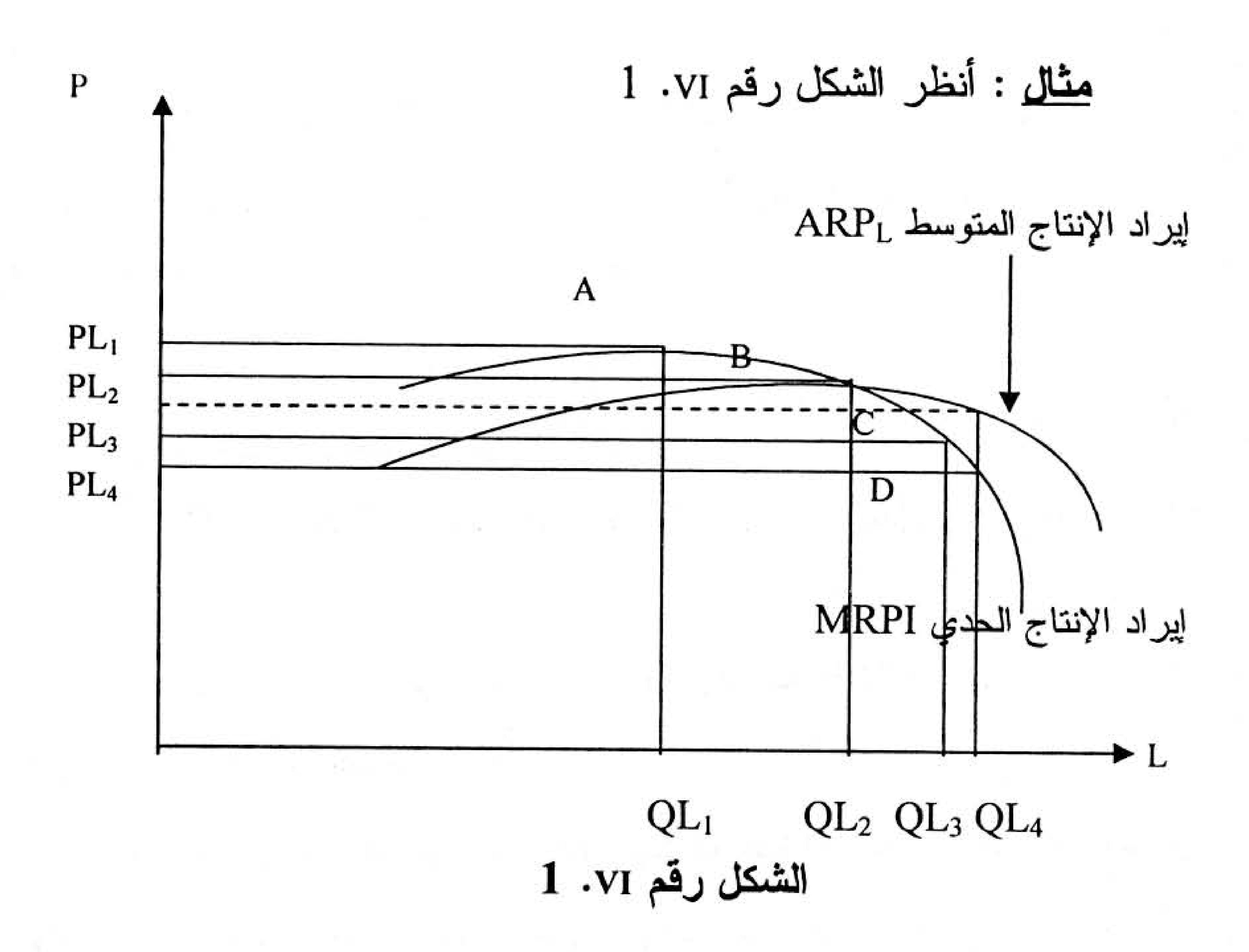
د ) ـ للبائعين والمشترين حرية تامة في الدخول إلى السوق والخروج منها على المدى الطويل.

عندما تسود المنافسة التامة سوق السلعة تكون قيمة الناتج الحدي تساوي إيراد الإنتاجية الحدية وعندما تسود المنافسة التامة سوق عامل الإنتاج المتغير فإن الوحدة الإنتاجية تستطيع الحصول على كل ما تحتاجه من خدمات هذا العامل بسعر ثابت.

تستمر الوحدة الإنتاجية في استخدامها لوحدات جديدة من خدمات عوامل الإنتاج طالما أن كل وحدة إضافية من عامل الإنتاج تسبب إضافات إلى

إيرادها الكلي أكبر من ما تضيفه إلى تكلفتها الكليـــة $(MRP\rangle MC)$ وتصـــل الوحدة الإنتاجية إلى أقصى أرباحها عندما يتساوى إيراد الإنتاجيـــة الحديـــة للعامل مع سعر العامل.

**مثال** : أنظر الشكل رقم VI. 1




**الشكل رقم VI. 1**

ـ إذا استخدمت الوحدة الإنتاجية الكمية $Q_{L1}$ بتكلفة $P_{L1}$ للوحدة الواحدة من العمل فإن التكاليف المتغيرة للإنتاج والمدفوعة للعمل هي $Cv = Q_{L1}.P_{L1}$ في حين الإيراد الكلي هو عبارة عن جداء $Q_{L1}$ في إيـــراد الإنتـــاج المتوســـط $ARP_L$.

نلاحظ أن الإيراد الكلي لم يغطي حتى التكاليف المتغيرة.

ـ إذا استخدمت الوحدة الإنتاجية الكمية $Q_{L2}$ نجد الإيـــراد الكلـــي يساوي التكاليف المتغيرة.

ـ إذا استخدمت الوحدة الإنتاجية الكمية $Q_{L3}$ بتكلفة $P_{L3}$ للوحدة الواحدة من العمل نجد الإيراد الكلي يغطي التكاليف المتغيرة والثابتة أو جزء منها.

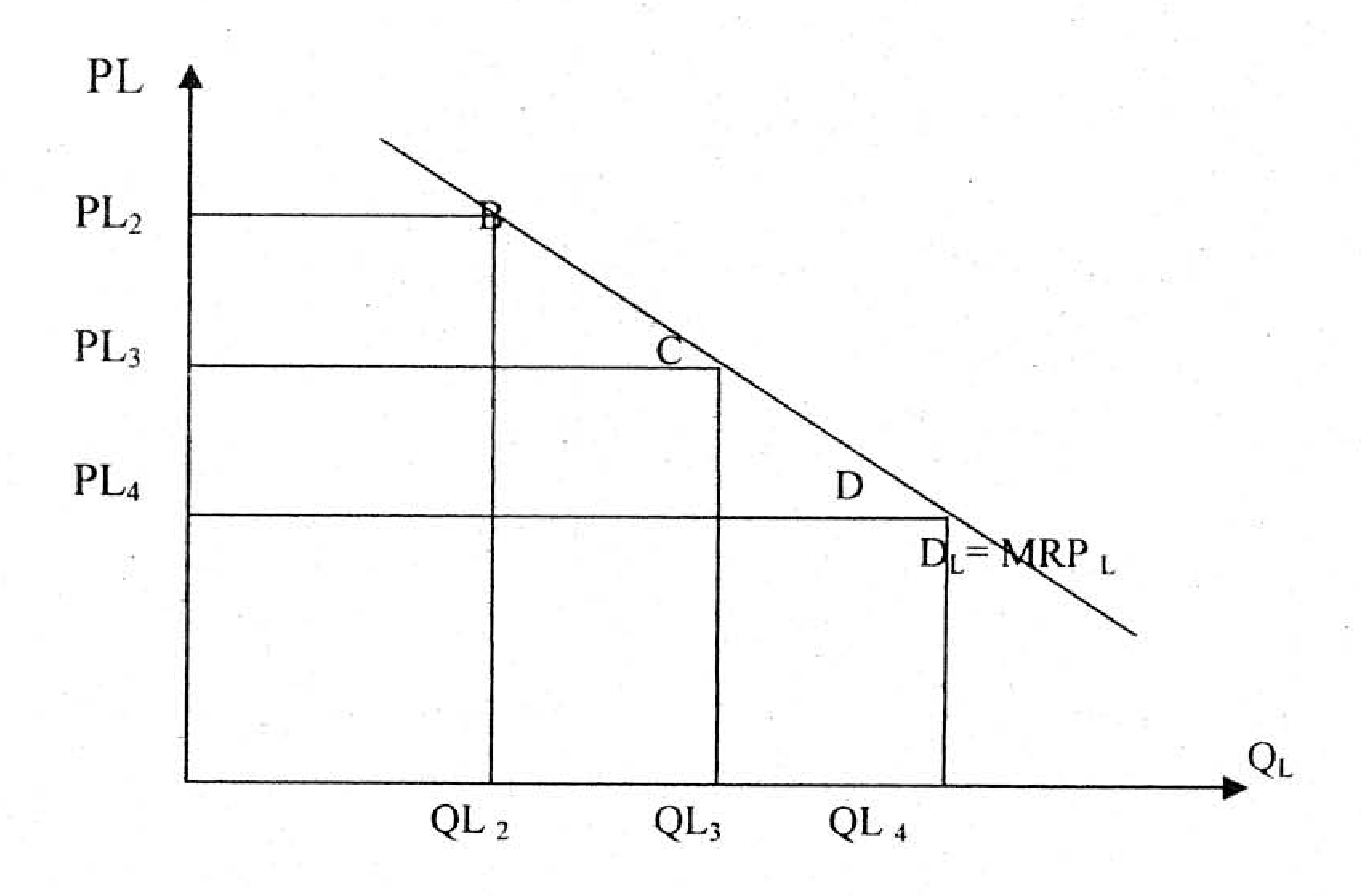
ـ إذا استخدمت الوحدة الإنتاجية الكمية $Q_{L4}$ بتكلفة $P_{L4}$ للوحدة الواحدة من العمل نجد الإيراد الكلي يغطي التكاليف المتغيرة والثابتة وتحقق الوحدة الإنتاجية ربحا.

ـ مما سبق نلاحظ ما يلي :

ـ أقل مستوى تستخدمه الوحدة الإنتاجية من العمل هو $Q_{L1}$ وتحقق عنده خسارة.

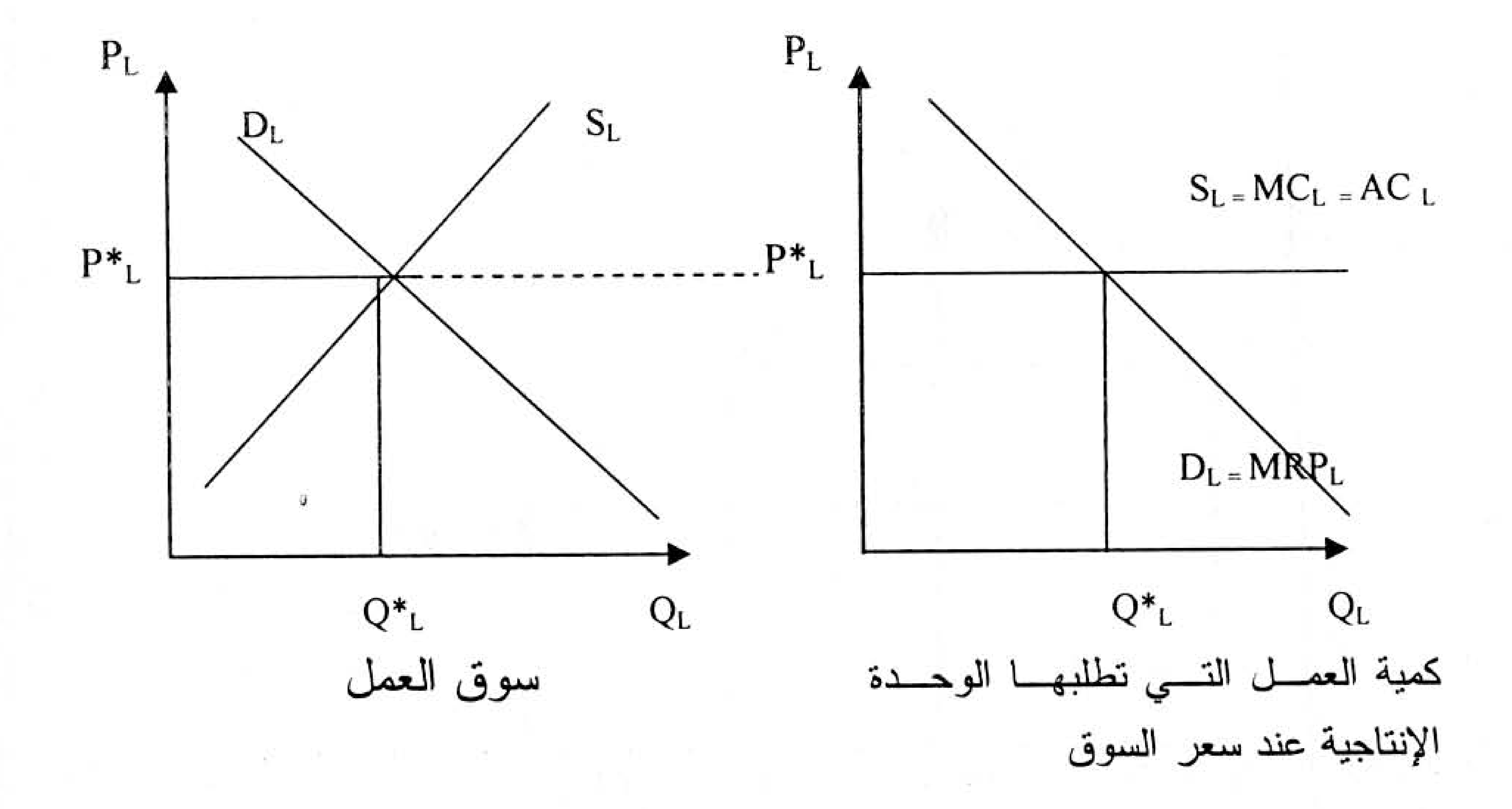
ـ أقصى حد للسعر يمكنه أن تدفعه الوحدة الإنتاجية للعمل هو $P_{L2}$ حيث تغطي تكاليفها المتغيرة فقط.

بعد مستوى من التوظيف $Q_{L1}$ تبدأ الوحدة الإنتاجية تتجه نحو تحقيق الربح كلما انخفض سعر وحدة العمل وزادت من حجم التوظيف، وبالتالي فإن النقط D, C, B تمثل الكميات التي تستخدمها الوحدة الإنتاجية من خدمات العمل عند مستويات السعر المختلفة، وبالتالي منحنى الطلب على خدمات العمل هو ذلك الجزء المنحدر من منحنى إيراد الإنتاج الحدي والواقع أسفل منحنى إيراد الإنتاج المتوسط. أنظر الشكل رقم VI. 2




**الشكل رقم VI. 2**

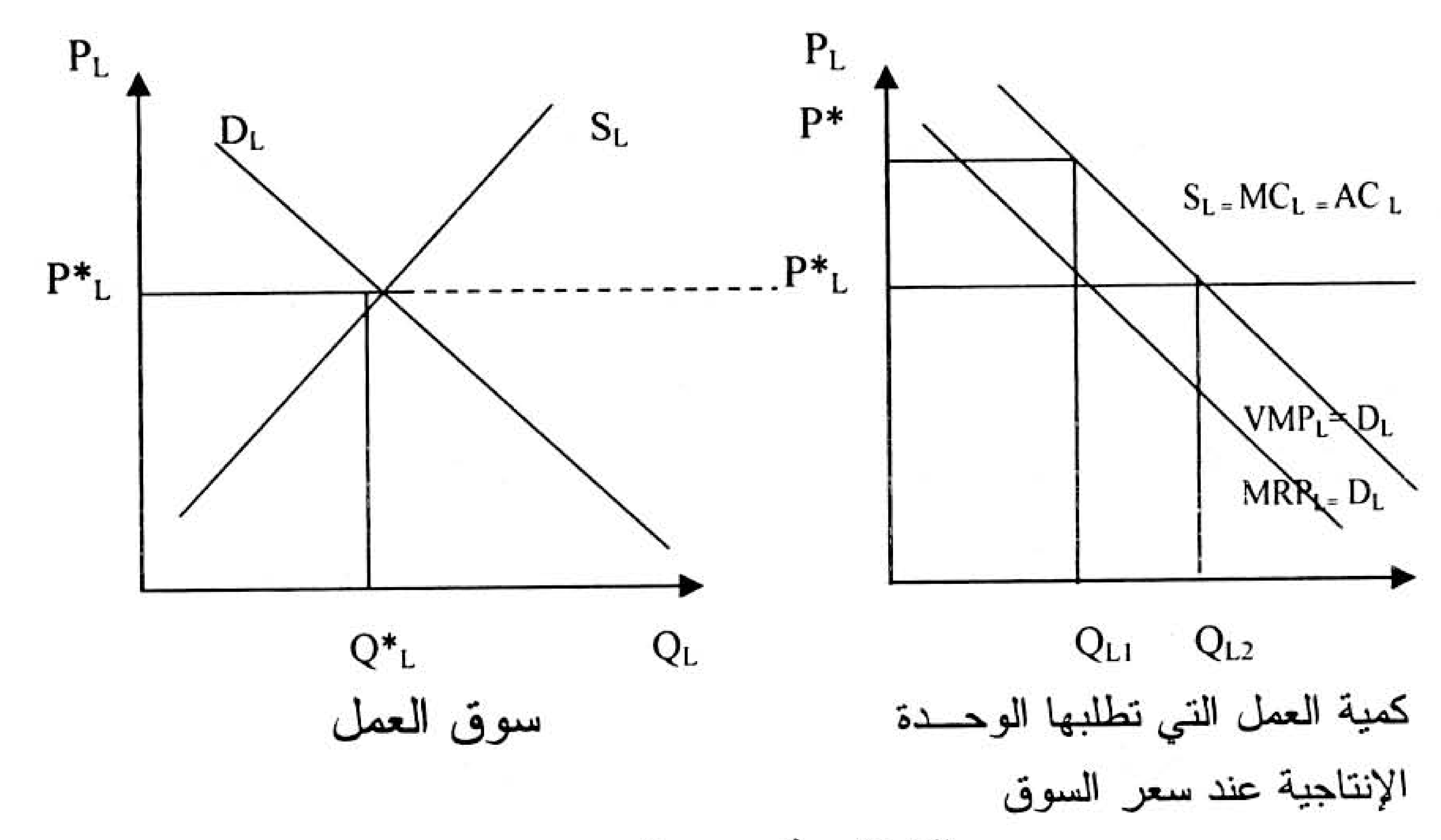
لقد فرضنا المنافسة التامة في سوق العمل ومعنى هذا أن المنتج لا يتحكم في سعر العمل وإنما يتحدد السعر بتفاعل قوى العرض والطلب على العمل في سوق العمل. فإذا كان منحنى عرض العمل الذي يواجهه المنتج (يختلف عن عرض السوق ) هو $S_L$ وهو نفسه يمثل منحنى التكلفة الحدية للعمل ومنحنى التكلفة المتوسطة للعمل؛ فإن السعر يتحدد من تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض أنظر الشكل VI. 3.




**الشكل رقم VI. 3.**

## II ـ حالة المنافسة التامة تسود سوق عوامل الإنتاج والإحتكار يسود سوق السلعة المنتجة :

في هذه الحالة عندما يسود الإحتكار سوق السـلعة المنتجـة يكـون الإيراد الحدي MR أقل من الإيراد المتوسط AR أي أقل من سعر السـلعة P وبالتالي قيمة الناتج الحدي أكبر من إيراد الإنتاج الحدي $MRP_L \rangle VMP_L$ .




**الشكل رقم VI. 4.**

في الشكل السابق نجد حجم العمل الذي تطلبه الوحدة الإنتاجية عندما تسود المنافسة التامة سوق السلعة هي $Q_{L2}$ بسعر $P^*_{L2}$ المحدد بتقــاطع إيراد الإنتاج الحدي مع منحنى العــرض $(MRP_L = VMP_L)$ وعنــدما ســاد الإحتكار سوق السلعة فإن حجم الطلب من العمل هو $Q_{L1}$ مقابل نفس السعر $P^*_{L2}$ والناتج عن تقاطع إيراد الإنتاج الحدي $MRP_L$ مع عرض العمل $S_L$ حيث قيمة الناتج الحدي أكبر من إيراد الإنتاج الحدي، ونلاحظ هنــا جــزء مستغل يساوي $(P^* - P_{L2}).Q_{L1}$ وهو المنطقة المخططة.

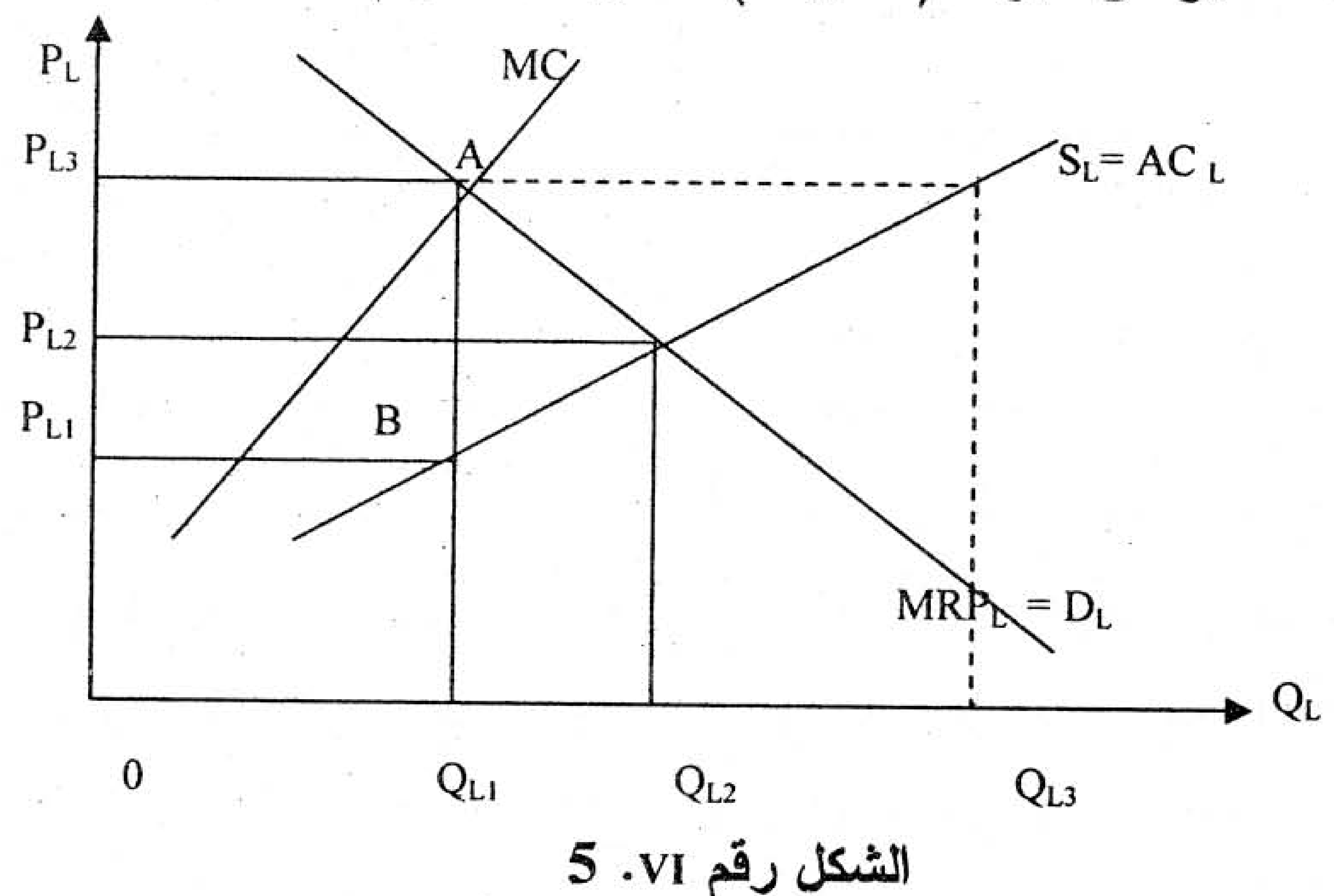
## III – حالة احتكار الشراء يسود سوق عوامل الإنتاج :

في بعض أسواق عوامل الإنتاج ومنها العمل، يحتكر منتج واحد شراء خدمات العمل في هذا السوق، كأن تكون الوحدة الإنتاجية أو الخدميــة هــي الوحيدة التي تستخدم هذا النوع من خدمات العمل.

في هذه الحالة يواجه المنتج المحتكر لشراء عامــل الإنتــاج منحنــى عرض السوق ومنحنى عرض السوق ميله موجب أي توجد علاقة طرديــة

بين سعر العمل وحجم الكمية المعروضة ومنه، وبالتالي إذا أراد المنـــتج أن يستخدم كمية أكبر من العمل عليه أن يدفع أجر أكبر وإذا أراد أن ينقص من استخدامه عليه أن يدفع أجر أقل.

نلاحظ في هذه الحالة تأثير المنتج المحتكر لشراء العمل فـــي ســـعر العمل، كما نلاحظ أن كل وحدة مضافة من العمل تضيف إلى التكاليف الكلية مبلغا أكبر من أجرها ( سعرها ). أنظر الشكل رقم VI. 5




**الشكل رقم VI. 5**

في الشكل السابق : يتحقق توازن المنـــتج عنـــدما $(MRP_L = MC_L)$ أي عندما تتساوى تكلفة العمل الحدية مع إيراد إنتاجه الحدي وهذا عند النقطة A ومستوى حجم العمل $Q_{L1}$ وسعر العمل $P_{L3}$ ( إيراد إنتاجية العمل الحدية ).

من منحنى عرض العمل الذي يبين سعر العمل نجـــد ســـعر العمـــل المقابل للحجم $Q_{L1}$ من العمل هو $P_{L1}$ ولكن عند هذا السعر يحصـــل العامـــل على أجر أقل من إيراد إنتاجه الحدي وبالتالي يوجد جزء من الأجر مستغل من طرف المنتج مقداره الفرق بين $P_{L3}$ و $P_{L1}$.

لكن يمكن للدولة أن تتدخل لمنع الإستغلال بفرض حد أدنـــى للأجـــر ليمنع الإستغلال أو يقلل منه ويزيد من حجم التوظيف أي يحـــارب البطالـــة وذلك حسب الفرضيتين التاليتين :

**الفرضية الأولى** : نفرض مستوى أجر العمل مساوي $P_{L3}$.

في هذه الحالة يكون حجم العمل $Q_{L1}$ في حين حجـــم القـــادرين علـــى العمل هو $Q_{L3}$ وبالتالي توجد بطالة إجبارية مساوية للفرق بين المستويين من العمل ولكنها منعت الإستغلال.

**الفرضية الثانية** :

نفرض مستوى أجر العمل مساوي $P_{L2}$

في هذه الحالة كذلك يحصل العامل على أجر مساوي إيـــراد إنتاجـــه الحدي وهو أجر عادل ويكون حجم التوظيف $Q_{L2}$ أي بإضافة في التوظيـــف بمقدار الفرق بين $Q_{L2}$ و $Q_{L1}$.



# مراجع الباب السادس

## ـ مراجع باللغة العربية

1 ـ ضياء مجيد الموسوي، النظرية الاقتصادية، التحليل الاقتصادي الجزئي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية. 1989.

2 ـ محمد علي الليثي، التحليل الاقتصادي، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية 1975.

3 ـ حلمي م هندرسون ريتشارد، أكوندت، ترجمة متوكل عباس مهلهل، نيويورك، دار ماكجووهيل للنشر 1983.

4 ـ محمود يونس محمد، عبد النعيم محمد مبارك، أساسيات علم الاقتصاد، بيروت، الدار الجامعية 1985.

5 ـ أحمد جامع، النظرية الاقتصادية، الجزء الأول، التحليل الاقتصادي الجزئي، القاهرة، دار النهضة العربية، الطبعة الخامسة، 1986.

6 ـ عمر صخري، مبادئ الاقتصاد الوحدي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية، 1986.

## ـ مراجع باللغة الفرنسية

1 – Amani ( Mokhtar ), Microéconomie, théorie critiques et exercices pratiques, Quebec Caetan Morin 1981.

2 – CEDRAS (Jacques ), Analyse microéconomie, Paris, Dalloz. 1981.

3 – Ferguson ( C.E ) , Théorie microéconomiques, Paris, Economica 1982.

4 – Guerrien (Bernard), Microéconomie et calcul économie Paris, Economica 1982.

5 – Lesourne (Jacques), Analyses microéconomiques, Paris, ESI 1985.

# الباب السابع

# التوزان العام واقتصاد الرفاهية

**تمهيد:**

عند دراسة كيفية تحديد السعر وتخصيص الموارد نتبع أحد المناهج التالية:

أ ـــ دراسة توازن المستهلك أو المنتج الفردي.

ب ـــ دراسة وتحليل توازن سوق سلعة واحدة.

جـــ ـــ تحليل جميع الأسواق آنيا وهو موضوع هذا الباب حيث نتناول في هذا الباب ما يلي:

1 ـــ مفهوم عام ومبسط للتوازن وذلك بوجود سوقين واحدة للإنتاج وأخرى لخدمات عوامل الإنتاج.

2 ـــ نموذج التوازن العام كما وضعه فالراس وباريتو وعرضه هيكس وسامولسون.

3 ـــ إقتصاديات الرفاهية.

# الفصل الأول

# مفهوم عام ومبسط للتوازن العام

**مفهوم عام ومبسط للتوازن العام**

نفرض وجود سوقين فقط أحدهما لخدمات عوامل الإنتاج والآخر للإنتاج.

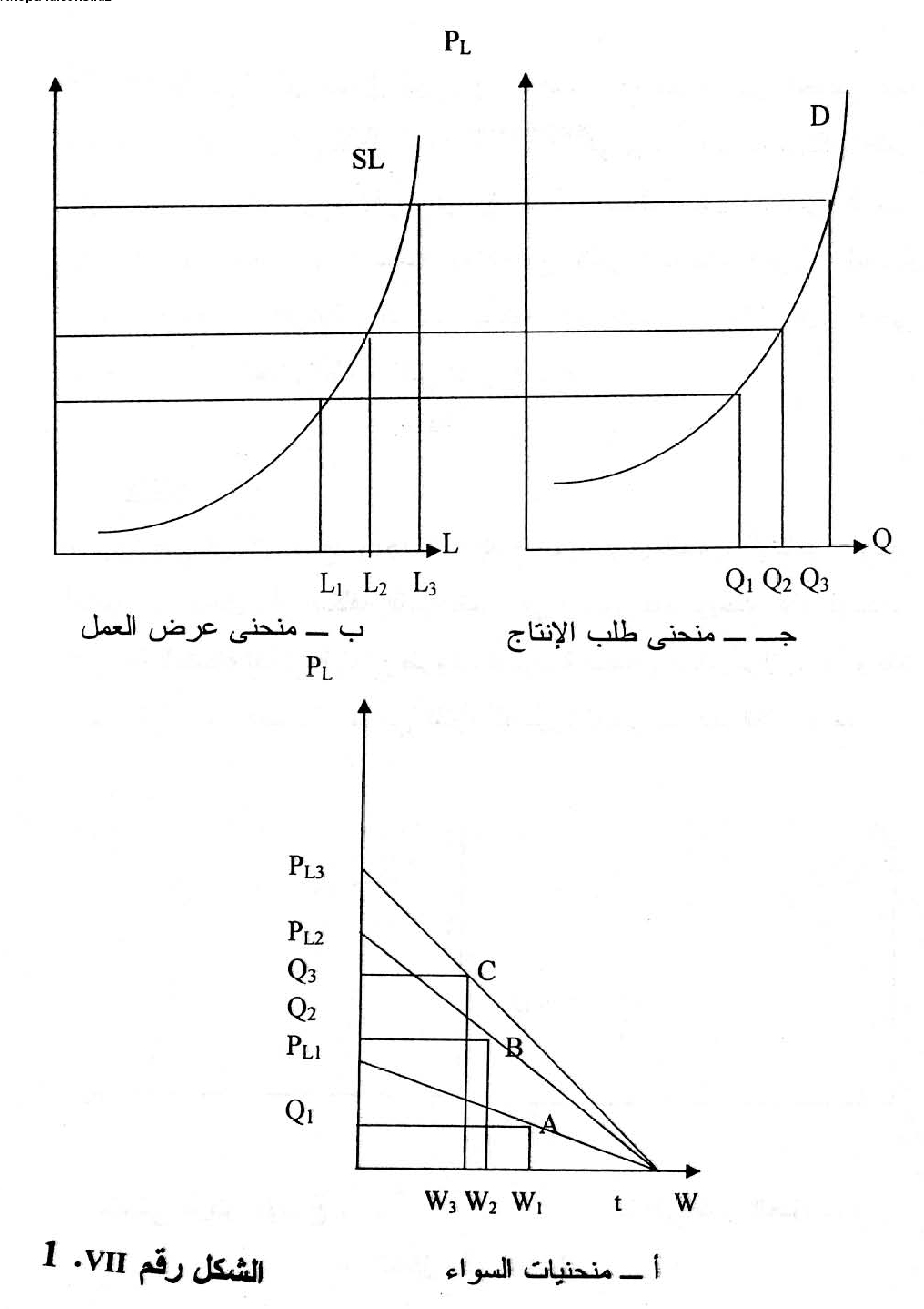
**I – الإستهلاك:**

لقد بينا سابقا أن دالة المنفعة هي تابع لمتغيرين مستقلين هما وقت الفراغ والدخل، حيث يرغب المستهلك فيهما، كما بينا أن معدل تعويض الدخل بوقت الفراغ من العمل يساوي معدل الأجر الحقيقي $P_L$ على أساس أن أسعار الإنتاج ثابتة. وبالتالي فكلما ارتفع معدل الأجر النسبي (الحقيقي) لساعة العمل، يعني هذا ارتفاع معدل الأجر النسبي لساعة الفراغ المضحى بها، وعليه يضحي المستهلك بساعة فراغ مقابل الزيادة في الدخل بمقدار الأجر النسبي.

نفرض أن معدل الأجر النسبي ثابت، وليكن $I_L$ والسعر P متغير، وبالتالي فإن معدل الأجر النسبي يختلف عن معدل الأجر الحقيقي، حيث $P_L = \frac{I_L}{P}$.

وبما أن المستهلك ينفق دخله على الإنتاج فنأخذ بالصيغة $P_L = \frac{I_L}{P}$.

سواء كان سعر الإنتاج ثابتا أو متغيرا، ويمكننا اشتقاق منحنى عرض العمل، وكذلك منحنى طلب المستهلك، وكذلك يمكننا تمثيل منحنيات سواء المستهلك بين وقت الفراغ W ( أقصى حد 24 ساعة ويعد ثابتا ) وحجم الدخل الحقيقي R، حيث $R = P_L . L$ ونعبر عنه بحجم السلع التي يستهلكها المستهلك بهذا الدخل.

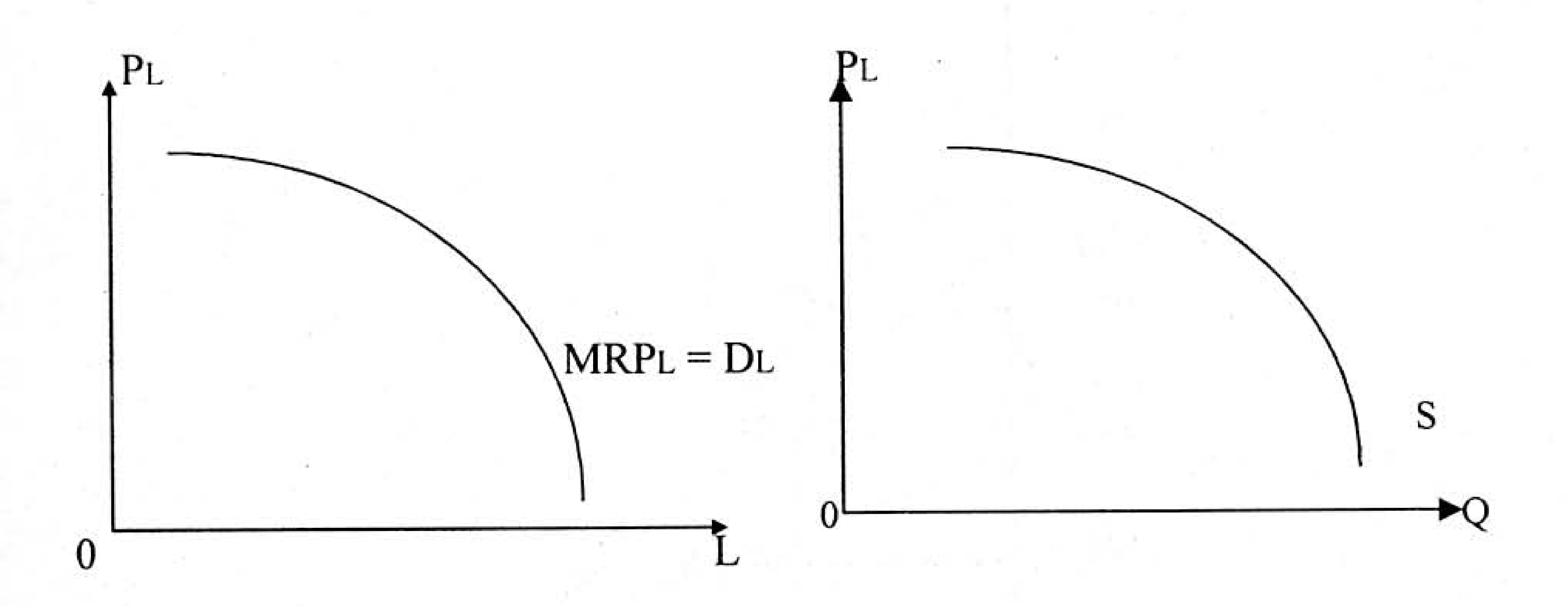



**الشكل رقم VII. 1**

نلاحظ في الشكل السابق الجزء ( أ ) كلما ارتفع معدل الجر الحقيقي كلما انتقلت نقطة التوازن إلى منحنى سواء أعلى وبالتالي يزيد طلب المستهلك العامل على الإنتاج مقابل زيادة في عرض العمل، حيث يمثل عرض العمل، $L = ti - Wi$، وحيث $t = 24$ ساعة، وبالتجميع الأفقي لمنحنيات العرض الفردية ومنحنيات الطلب الفردية والخاصة بجميع المستهلكين نحصل على منحنى العرض الكلي ومنحنى الطلب الكلي على الإنتاج.

## II ـ الإنتاج

نفرض أن كل منتج يواجه دالة إنتاج معينة وأن العامل الإنتاجي الوحيد المتغير هو العمل وأن التكلفة الكلية تتمثل في الأجور فقط ويحكم هذه الوحدات الإنتاجية المشكلة لقطاع الإنتاج ظروف المنافسة التامة ويتحقق توازن كل وحدة إنتاجية في الفترة الطويلة، أما في الفترة القصيرة تغطي تكاليفها الكلية فقط.




منحنى طلب العمل ـ أ          منحنى عرض الإنتاج ـ ب

الشكل رقم VII. 2

لقد قلنا سابقا أن المنتج يحقق أقصى ربح عندما يكون معدل الأجر النسبي المدفوع مساويا لإيراد الإنتاج الحدي، وبما أن المنتج في حالة منافسة تامة فإن قيمة الإنتاج الحدي تساوي إيراد الإنتاج الحدي.

$$I_L = MRPL = VMPL = P.\ MP$$

ومنه $MP = \frac{I_L}{P} = P_L$ الإنتاج الحدي العيني،

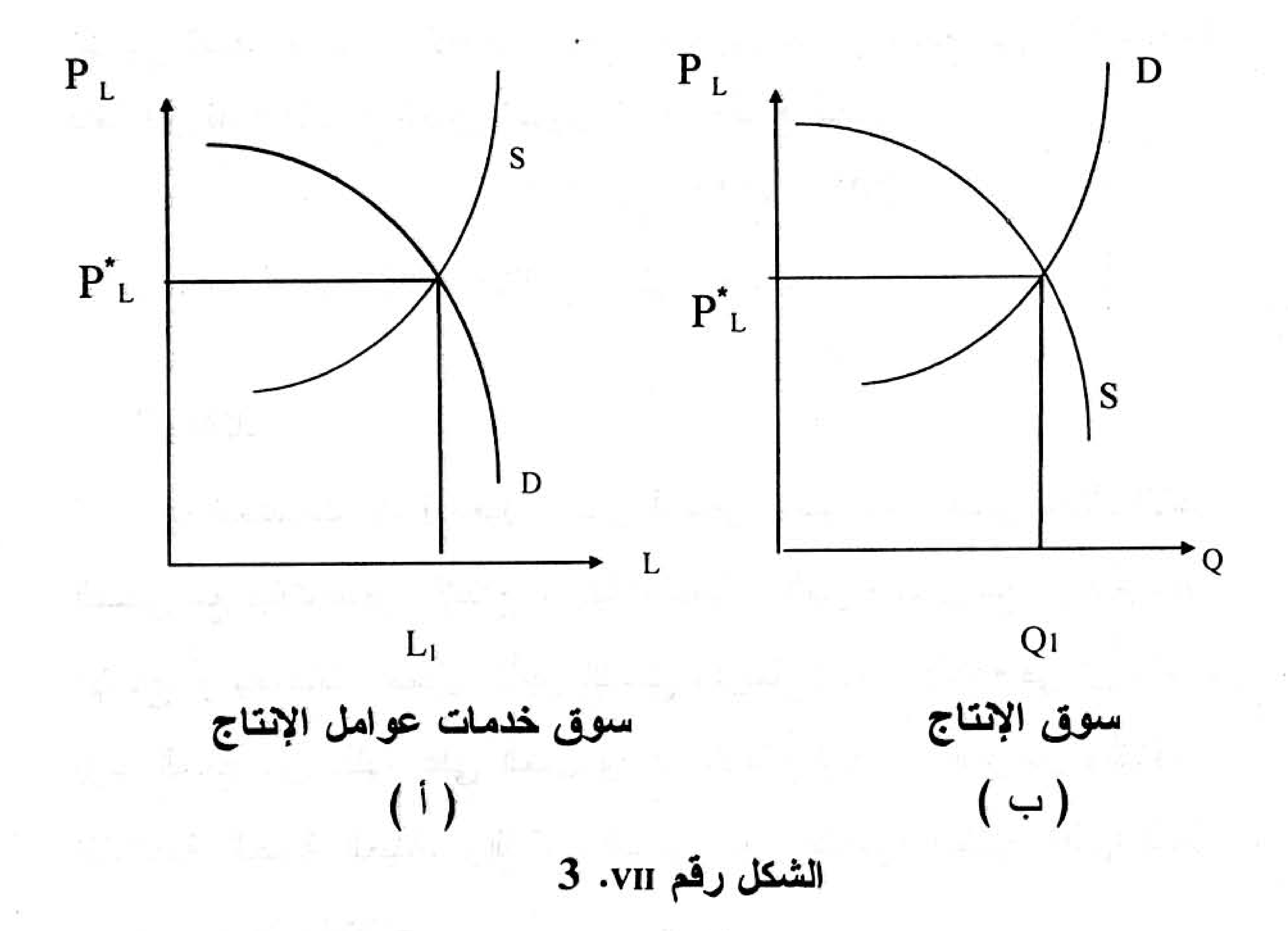
وبالتالي:

إذا انخفضت $P_L$ ( معدل الأجر الحقيقي ) سواء بانخفاض معدل الأجر النسبي مع ثبات سعر الإنتاج أو ثبات معدل الأجر النسبي مع ارتفاع سعر الإنتاج أو بانخفاض معدل الأجر النسبي وارتفاع سعر الإنتاج في آن واحد، يزيد المنتج من طلبه على العمل ويزيد الإنتاج وبالتالي العرض وتنخفض الإنتاجية الحدية العينة. والشكل السابق يبين منحنى الطلب على العمل ومنحنى عرض الإنتاج.

وبالتجميع الأفقي لمنحنيات الطلب على العمل ومنحنيات عرض الإنتاج نحصل على منحنى الطلب الكلي على العمل ومنحنى العرض الكلي للإنتاج.

### III – التوازن

في نموذج التوازن نحتاج إلى تساوي الطلب الكلي مع العرض الكلي.




الشكل رقم VII. 3

في الشكل السابق تحقق معدل الأجـــر الحقيقـــي $P_1^* = \frac{I_1{}^*}{P}$ عنـــد التوازن في السوقين، حيث في سوق خدمات عوامل الإنتاج إجمالي الأجور التي تدفعها الوحدات الإنتاجية تساوي إجمالي دخول المســتهلكين، هــؤلاء المستهلكون ينفقونها في سوق الإنتاج وبالتالي إجمالي إيــرادات الوحــدات الإنتاجية من مبيعاتها يساوي إجمالي نفقات المستهلكين على الإنتـــاج وهــذا تحت القيود المفروضة على المستهلكين والمنتجين.

إذن عند التوازن الطلب الكلي على العمل يساوي العرض الكلـــي لـــه والطلب الكلي على الإنتاج يساوي العرض الكلي له.

# الفصل الثاني

# التوازن الإقتصادي العام كما وضعه فالراس وباريتو وعرضه هيكس وساملسون

## نموذج فالراس

سنتناول في هذا الفصل التوازن الإقتصادي العام كما وضعه فالراس وباريتو وكما عرضه هيكس وسامولسون.

هذا النموذج مغلق، أي يتم تحديد جميع متغيراته آنيا بمعرفة الظروف المعطاة، فيما يلي نعرض نموذج التبادل كما وضعه فالراس ثم نموذج التبادل والإنتاج ثم شروط توازن جميع الأسواق آنيا.

### I ـ نموذج التبادل البحت ( المقايضة )

يتعامل نموذج التبادل البحت ( المقايضة ) مع مشاكل التوزيع والتسعير لمجتمع ما يشتمل على m من الأفراد و n من السلع، كل فرد من أفراد المجتمع يمتلك سلعة واحدة أو أكثر ( نفترض العرض ثابتا ) يذهب بها إلى السوق لمبادلتها في سوق تنافسية. ولكل فرد حرية البيع والشراء حسب أسعار السوق السائدة، وبالرغم من وجود نقود تعتبر هذه المبادلات بمثابة عمليات مقايضة، ونفرض أن:

ـ المستهلك J حيث ( $J = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots m$ ) يتوفر على كمية من السلعة $X_{ij}$ حيث $I = 1, 2 \ldots\ldots\ldots n$ قبل عملية المبادلة وهي كمية معلومة.

ـ يخرج المستهلك من السوق بعد عملية المبادلة بالكمية $y_{ij}$ حيث تعد مجهولة.

ـ ولكن ما هو السعر الذي تتم به المبادلة ؟

يعبر فالراس عن جميع الأسعار بدلالة كمية إحدى السلع ويختارها بصورة تحكيمية ويطلق عليها وحدة القياس، ويكون سعرها هو عبارة عن الوحدة، كما أن الطلب الكلي هو Yi والعرض الكلي هو Xi.

لتوازن السوق يجب توفر مجموعتين من الشروط، شروط توازن المستهلك الفرد عند القيام بعملية البيع والشراء، وشروط توازن قوى السوق.

## 1 . توازن المستهلك الفرد

لقد بينا في باب سلوك المستهلك أن المستهلك يحاول تعظيم منافعه باستهلاك مجموعة سلعية وفق دخله المحدود والأسعار السائدة في السوق، أي يوجد شرطان لتوازن المستهلك هما شرط الإنفاق وشرط المنافع.

نفرض أن للمستهلك J دالة منفعة ترتيبية هي:

$$U_j = F_j = (Y_{1j}, Y_{2j} \ldots\ldots\ldots Y_{nj})$$

ونفرض هذه الدالة مستمرة وقابلة للإشتقاق ومشتقاتها الجزئية الأولى والثانية مستمرة أيضا.

من شروط الدرجة الأولى نستنتج شرطي التوازن، شرط المنافع وشرط الإنفاق.

### شرط المنافع:

$\frac{U_{Ij}}{P_i} = U_{ij} = \lambda$ ، $(i = 2, 3 \ldots\ldots n\ ,\ j = 1, 2 \ldots\ldots\ldots m)$ عدد المعادلات هو [ m ( n - 1 ) ] أي تتعادل المنافع الحدية للوحدة النقدية في أوجه الإنفاق المختلفة وذلك بالنسبة لكل مستهلك ( بدأنا I من 2 لأن P1 = 1 ) ونلاحظ هنا عدد المعادلات هو [ m ( n - 1 ) ] لتحديد كمية Yij وعدد هذه المجاهيل هو ( m. n ).

**شروط الإنفاق**

إن حجم دخل المستهلك J هو $\sum_{I=1}^{n} P_I X_{IJ}$ وحجم إنفاقه هو $\sum_{i=1}^{n} P_{ij}$ وبالتالي فإن شرط الإنفاق هو:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i X_{ij} - \sum_{i=1}^{n} P_i Y_{iy} = 0$$ ( عدد المعادلات هو m )

$$\sum_{i=1}^{n} P_i (X_{ij} - Y_{ij}) = 0$$

حيث $j = 1,2 \ldots\ldots m$ ونلاحظ هنا عدد المعادلات هو m وعدد المجاهيل من $P_1$ هو ( n - 1 ) ومن هذين الشرطين يمكننا اشتقاق دالة الطلب لكل مستهلك على السلع المختلفة وبجمع دوال الطلب على كل سلعة I بالنسبة لجميع المستهلكين نحصل على دالة طلب السوق على السلعة I .

$$Y_I = \sum_{J=1}^{m} Y_{IJ} = D_I (P_1, P_2, \ldots\ldots P_n), I = 1,2,3\ldots\ldots n$$

## 2 – توازن السوق

إن شرط توازن السوق هو العرض الكلي يساوي الطلب الكلي. فإذا كان عرض السوق من السلعة I هو $X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}$ وطلبها هو $Y_i = \sum_{j=1}^{m} Y_{ij}$ حيث $I = 1, 2 \ldots\ldots\ldots n$ فإنه عند التوازن يكون:

$$Y_i - X_i = 0$$ أي $$\sum_{j=1}^{n} (Y_{ij} - X_{ij}) = 0$$ ( عدد المعادلات هو n )

إذن نحصل من ما سبق على نموذج توازن السوق به عدد المعادلات يساوي $m.n + 1 = n + m + m(n - 1)$ معادلة نقوم بحلها لمعرفة المجاهيل والتي عددها ( m.n ) من الكمية $Y_{ij}$ , ( n - 1 ) من السعر $P_i$ أي ( m.n + n - 1 ) مجهول.

نلاحظ في هذا النموذج الفرق بين عدد المعادلات وعدد المجاهيل هو واحد، وحيث عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل فالمعادلات لها أكثر من حل، إلا إذا كانت المعادلة الزائدة مرتبطة خطيا.

ولقد قام فالراس بحل مشكلة زيادة عدد المعادلات عن عدد المجاهيل بإثبات أنه يمكن اشتقاق أحد شروط التوازن من الشروط الأخرى، أي اثبت فالراس أن إحدى المعادلات مختارة بصورة تحكمية وهي ليست مستقلة عن باقي المعادلات.

لقد افترضنا في النموذج أن $p_1$ ( الوحدة ) وبالتالي:

$$\sum_{j=1}^{m} P\ (Y_{ij} - X_{ij}) = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{1i}\ (Y_{ij} - X_{ij}) = 0$$

وافترضنا أن $\sum_{j=1}^{m} (Y_{ij} - X_{Ij}) = 0$ وبالتالي يمكننا الإستغناء عن شرط توازن السوق بالنسبة للسلعة ( وحدة القياس )، وبالتالي فإن عدد المعادلات هو ($m . n + n - 1$) وعدد المجاهيل هو ($m . n + n - 1$) (يطلق إسم قانون فالراس على تبعية إحدى المعادلات لباقي علاقات النموذج)، فإذا كانت هذه المعادلات تتوفر على شروط حل نظام معادلات فإن لها حل وحيد.

<u>ملاحظة:</u>

إن صياغة النموذج لهذا الشكل لا يضمن الحصول على أسعار توازنية موجبة، وقد بين زنثيم ( Zenthem ) أنه يمكن إعادة شروط التوازن لتلافي الحصول على أسعار سالبة بحيث تكون إما أن يتعادل الطلب بالنسبة لسلعة معينة مع عرضها أو يقل الطلب عن العرض فيكون سعرها صفرا.

## II ـ نموذج التبادل والإنتاج

نفرض مجتمعا ما مشكلا من m من الأفراد ويمتلك S من عوامل الإنتاج يبيعون خدماتها للمنتجين مقابل حصولهم على دخول ينفقونها في شراء n من السلع الإستهلاكية.

نفرض عدم وجود منتجات مشتركة وكل وحدة من السلع تستلزم كمية ثابتة من كل عامل من عوامل الإنتاج، أي أن المعاملات الفنية للإنتاج ثابتة مما يشير إلى ثبات الغلة وبالتالي فعدد الوحدات الإنتاجية القائمة غير مهم ولا يؤثر على متوسط نفقة الإنتاج.

نفرض أن الكمية المتوفرة لدى الفرد J من عامل الإنتاج K هي $Q_{kj}$ حيث:

$J = 1............m , K = 1.............S$ وهذه الكمية معطاة ومعلومة. أما الكمية الكلية المعروضة من العامل K فهي $Q_k = \sum_{j=1}^{m} Q_{kj}$ وهي ثابتة ونفرض $Y_{ij}$ هي الكمية التي يستهلكها الفرد J من السلعة I.

حيث: $I = 1...........n \ , J = 1............m$ ومجموع الكمية المطلوبة (المستهلكة) هي: $Y_i = \sum_{j=1}^{m} Y_{ij}$ من السلعة I.

نفرض $P_I$ هو سعر السلعة I ويمثل كمية سلعة معينة كوحدة قياس و $P_K$ هو سعر عامل الإنتاج K.

نفرض $a_{KI}$ هي الكمية من العامل K اللازمة لإنتاج السلعة I، ولتحقيق توازن مجموع الأسواق آنيا يجب توافر ثلاث مجموعات من شروط التوازن وهي:

ـ شروط توازن المستهلك.

ـ شروط توازن المنتج.

ـ شروط توازن سوق عوامل الإنتاج.

**1 . توازن المستهلك الفرد**

شرط المنافع:

$$\frac{U_{IJ}}{P_I} = U_{IJ}$$
$$I = 2.....n$$
$$J = 1....m$$

شرط الإنفاق:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i Y_{ij} = \sum_{K=1}^{S} P_K q_{Kj}$$

$$J = 1, \; 2, \; 3 ........m$$

من شرط المنافع وشرط الإنفاق نشتق دالة الطلب الفردي من السلعة I

ثم بالتجميع نحصل على الطلب الكلي من السلعة I.

$$Y_i = D_i(P_1, P_2......P_n, P_1, P_2.......P_S)$$

( عدد المعادلات N ).

I= 1,2,3............m

**2. توازن المنتج :**

إذا فرضنا المنافسة التامة في السوق، فإنه في الأجل الطويل لا بد أن يساوي سعر كل سلعة نفقة إنتاجها.

$$P_i = \sum_{K=1}^{S} a_{KI} P_K$$

عدد المعادلات هو n

حيث: I = 1,2 ............n

### 3. توازن سوق عوامل الإنتاج

يتمثل شرط توازن سوق عوامل الإنتاج في ضرورة استخدام عوامل الإنتاج استخداما كاملا.

$$Q_K = \sum_{I=1}^{n} a_{KI} . Y_I$$ ( عدد المعادلات هو S )

### III – شروط توازن جميع الأسواق آنيا:

لتوازن جميع الأسواق آنيا يكون لدينا نموذج له:

– n من الكميات المطلوبة من السلع $Y_i$.

– ( n -- 1 ) من أسعار السلع $P_i$.

– S من أسعار خدمات عوامل الإنتاج $P_K$.

– مجموع المتغيرات ( المجاهيل ) المطلوب تحديدها هو:

$n + ( n -1 ) + S = 2 n + S - 1$ من المجاهيل.

– $2 n + S$ من المعادلات.

نجد في هذا النموذج عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل بواحد. أي يوجد أكثر من حل لهذه الجملة من المعادلات، إلا إذا كانت إحدى هذه المعادلات مرتبة خطيا حيث يصبح عدد المعادلات $2n + S - 1$ وعدد المجاهيل هو $2n + S - 1$ وبالتالي إذا توافرت شروط الجملة ( النظام ) فيكون لها حل وحيد.

# الفصل الثالث

# إقتصاد الرفاهية

## ـ اقتصاديات الرفاهية

إن الغرض من اقتصاديات الرفاهية هو تحديد التحسن في وضعية الأفراد نتيجة التغيرات المحدثة والمتوقعة في عملية تخصيص الموارد المتاحة أو توزيع السلع المنتجة. ويحدث التحسن إذا كانت نتيجة التغيرات المحدثة تؤدي إلى زيادة إنتاج سلعة دون تخفيض إنتاج إحدى السلع الأخرى أو تحسين وضعية فرد من أفراد المجتمع دون الإضرار بفرد آخر مما يدعى أمثلية باريتو.

لقد إنطلقت نظرية الرفاهية الإقتصادية من الوضع الأمثل لباريتو، هذا الوضع يعرف على أنه الوضع الذي نصل إليه عبر التغيرات المحدثة و لا يمكن بعده إذا ما تمت تغيرات كإعادة التخصيص أو التوزيع زيادة إنتاج دون الضرر بأخرى أو تحسين وضعية فرد دون الضرر بآخر.

وللحصول على أمثلية باريتو يجب توفر الشروط التالية:

1 ـ شروط المنافسة التامة.

2 ـ عدم وجود وفورات خارجية أو مهدورات.

3 ـ توزيع الدخل ثابت.

4 ـ ثبات نسبة الأسعار.

وتتطلب شروط الدرجة الأولى للوضع الأمثل لباريتو ما يلي:

1 ـ أن يتساوي MRS لكل مستهلك MRT لكل منتج لكل زوج من السلع.

2 ـ أن يساوي MRS لكل مستهلك MRTS لكل منتج لكل زوج من العوامل الأولية.

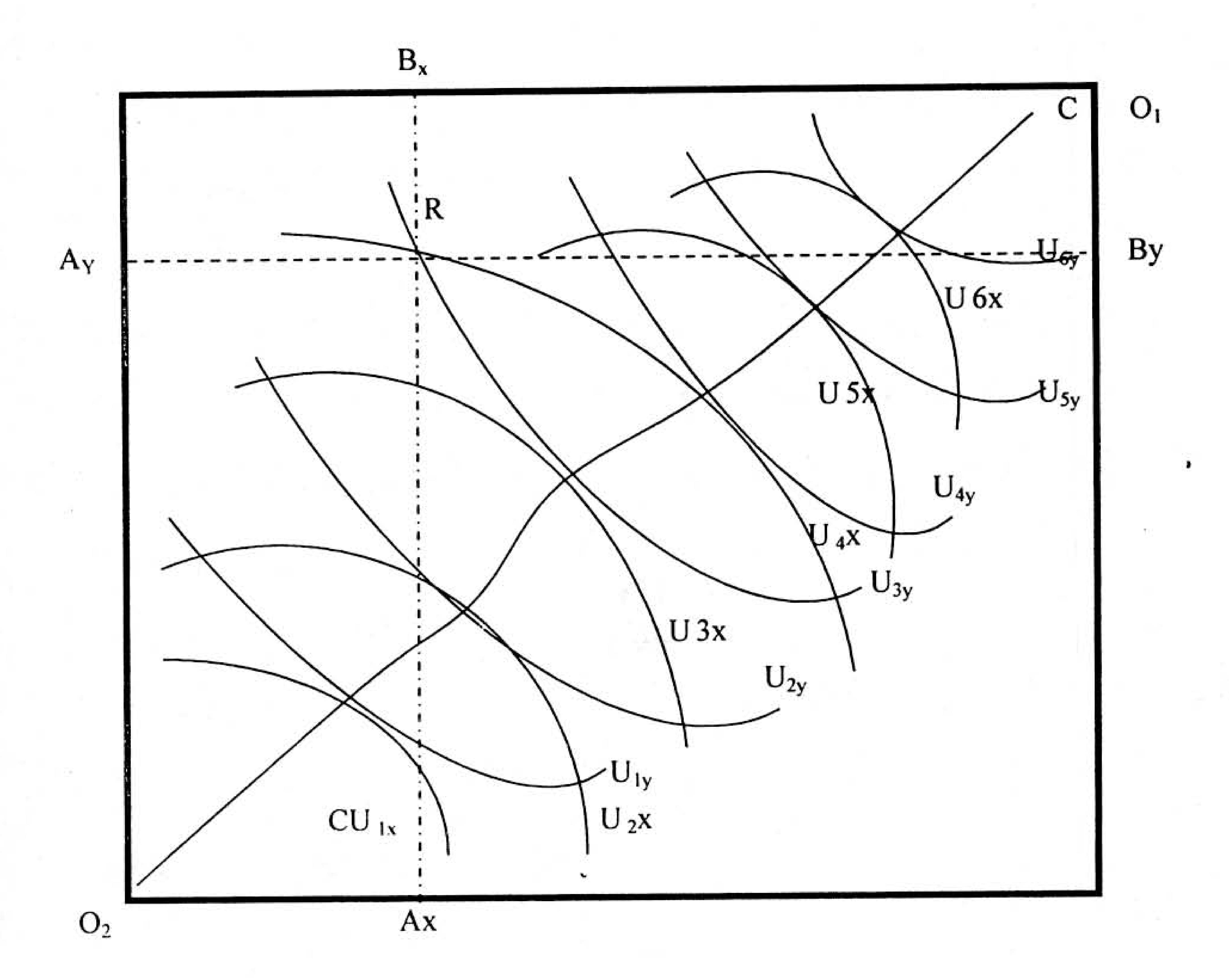
أن تتوفر أيضا الشروط ذات الدرجة الثانية في الوضع الأمثل لباريتو.

وينتج التنافس التام عادة من توفر شروط الدرجة الأولى للوضع الأمثل . ويمثل التنافس التام من هذا المفهوم وضع أمثل للرفاهية، وهي لا تتضمن تحقيق شروط الدرجة الثانية، كما لا تتضمن أن يكون توزيع الدخول أمثل بأي مفهوم، بالإضافة لهذا يترك تعريف الرفاهية المثلى بدلالة الوضع الأمثل لباريتو كمية معينة من الغموض في التحليل، إذ أن كل نقطة على منحنى العقد تكون في الوضع الأمثل لباريتو ولا يستطيع الإنسان أن يختار من بينها بدون ضوابط أخلاقية.

يجب تعديل الشروط ذات الدرجة الأولى لأمثلية باريتو في وجود تأثيرات خارجية في الإستهلاك أو الإنتاج. وإذا وجدت تأثيرات خارجية فلن يؤدي التنافس التام إلى أمثلية باريتو.

## I ـــ أمثلية باريتو للاستهلاك.

نناقش أمثلية باريتو للإستهلاك باستخدام صندوق ( إدج وورث ) بافتراض وجود شخصين x و Y وسلعتين B.A ضمن إطار إقتصاد تقايضي بحت، لكل مستهلك مجموعة من منحنيات السواء تبين تفضيلاته ومستوى المنفعة المحصل عليه من استهلاك السلعتين. وللحصول على صندوق ( إدج وورثا ) نضع مجموعتي منحنيات السواء في وضعين متعاكسين داخل مستطيل. انظر الشكل رقم VIII. 4.




**الشكل رقم VIII . 4**

إن أي نقطة داخل الصندوق تمثل توزيعا معينا للسلعتين بين المستهلكين الإثنين، وأن الكميات المستهلكة من قبل المستهلك X تقاس عن طريق إحداثيات النقطة ابتداء من نقطة الأصل $O_1$، وأن الكميات المستهلكة من قبل المستهلك Y تقاس عن طريق إحداثيات النقطة ابتداء من نقطة الأصل $O_2$.

يحدث تماس بين خريطتي سواء المستهلكين حيث يمثل CC المحل الهندسي لنقطة التماس ( منحنى الإتفاق ) وعند كل نقطة تماس يتساوى معدل الإحلال بين السلعتين بالنسبة للمستهلكين الإثنين.

إذا أخذنا النقطة R نجد معدل الإحلال بين السلعتين مختلف بالنسبة للمستهلكين، ومن الممكن زيادة مستوى المنفعة لكلا المستهلكين بتغيير التوزيع الحالي.

إذا أخذنا النقطة E تزيد منفعة المستهلك X لأنه انتقل إلى منحنى سواء أعلى لكن لا يضر بالمستهلك Y لأن هذا الأخير ما زال يحافظ على نفس مستوى المنفعة.

إذا أخذنا النقطة F تزيد منفعة المستهلك Y دون الضرر بالمستهلك X.

إذا أخذنا أي نقطة على منحنى الإتفاق محصورة بين النقطتين F, E تتحسن منفعة المستهلكين بانتقالهما إلى منحنيات سواء أعلى.

إذا أخذنا نقطة من منحنى الإتفاق أخرى تتحسن منفعة أحد المستهلكين مع الضرر بالمستهلك الآخر حيث تنخفض منفعته.

نستنتج من ذلك أن أي نقطة محصورة بين نقطتين F, E هي أكثر تفضيلا من النقطة R كذلك تمثل كل من النقطتين F, E الوضع الأمثل الذي لا يمكن بعده تحسين منفعة مستهلك دون الضرر بالمستهلك الآخر.

وفيما يلي نثبت ذلك رياضيا.

**الإثبات الرياضي:**

نفرض وجود مستهلكين إثنين فقط نرمز لهما بالرمزين X, Y يستهلكان سلعتين A, B بالكميات Ax , Bx ، By , Ay

بحيث A = Ax + Ay ثابت ، B = Bx + By ثابت

ودالتي منفعة المستهلك هما:

$$U_Y = f_Y(A_Y, B_Y), \qquad U_x = f_x(A_x, B_x)$$

ونفرض أن المستهلك Y يتمتع بمستوى منفعة $\overline{U}_Y$.

للحصول على أمثلية باريتو نعظم منفعة المستهلك X تحت شرط أن لا نلحق ضررا بالمستهلك Y أي منفعته $\overline{U}_Y$ تبقى ثابتة وتكون دالة الهدف:

$$V = f_x(A_x, B_x) + \lambda\left[f(A - A_x, B - B_X) - \overline{U}_Y\right]$$

حيث λ هي مضاعف لاقرانج. وبإيجاد شروط الدرجة الأولى ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta A_X} &= \frac{\delta f_x}{\delta A_X} - \lambda \frac{\delta f_Y}{\delta A_Y} = 0 \\ \frac{\delta V}{\delta B_X} &= \frac{\delta f_x}{\delta B_X} - \lambda \frac{\delta f_Y}{\delta B_Y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{\delta f_X}{\delta A_X} = \frac{\delta f_Y}{\delta B_Y} \text{.......... (1)}$$

$$\frac{V}{\delta \lambda} = f_Y(A - A_x, B - B_x) - \overline{U}_Y = 0 \text{.......... .......... (2)}$$

ومن (1) و (2) نستنتج:

$$\left(\frac{\delta f_X}{\delta A_X} / \frac{\delta f_X}{\delta B_X}\right) = \left(\frac{\delta f_Y}{\delta A_Y} / \frac{\delta f_Y}{\delta B_Y}\right)$$

$$\frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة A بالنسبة للمستهلك Y}}{\text{المنفعة الحدية للسلعة B بالنسبة للمستهلك Y}} = \frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة A بالنسبة للمستهلك X}}{\text{المنفعة الحدية للسلعة B بالنسبة للمستهلك X}}$$

أي تساوي المعدل الحدي للإحلال بين السلعتين بالنسبة للشخصين.

$$MRS_{AB_X} = MRS_{AB_Y}$$

## II – التوزيع الأمثل للموارد

نفرض وجود منتجين Y, X ينتجان سلعتين B, A باستخدام عاملي إنتاج K, L حيث: $K = K_A + K_B, \quad L = L_A + L_B$

ودوال إنتاج:

$$Q_B = f_B(L_B, K_B), \quad Q_A = f_A(L_A, K_A)$$

للحصول على مثلوية باريتو يجب تعظيم مستوى الإنتاج من السلعة A تحت شرط بأن يكون مستوى الإنتاج من السلعة B مقررا مسبقا $\overline{Q}_B$.

إذن دالة الهدف هي:

$$V = f_A(L_A, K_A) + \lambda\left[f_B(L - L_A, K - K_A) - \overline{Q}_B\right]$$

ومن شروط الدرجة الأولى نجد

$$\frac{\delta V}{\delta L_A} = \frac{\delta f_A}{\delta A_A} - \lambda \frac{\delta f_B}{\delta L_B} = 0$$

$$\frac{\delta V}{\delta K_A} = \frac{\delta f_A}{\delta K_Q} - \lambda \frac{\delta f_B}{\delta K_B} = 0$$

$$\frac{\delta V}{\delta \lambda} = f_B(L - L_A, K - K_A) - Q_B = 0$$

ومنه نجد

$$\frac{\delta F_A / \delta L_A}{\delta F_B / \delta L_B} = \frac{\delta F_A / \delta K_A}{\delta F_B / \delta K_B} \cdot \frac{\delta F_A / \delta K_A}{\delta F_A / \delta L_A} = \frac{\delta F_B / \delta K_B}{\delta F_B / \delta L_B}$$

$$\frac{\text{الإنتاجية الحدية لرأسمال المنتج B}}{\text{الإنتاجية الحدية للعمل المنتج B}} = \frac{\text{الإنتاجية الحدية لرأسمال المنتج A}}{\text{الإنتاجية الحدية للعمل المنتج A}}$$

أي تساوي معدل الإحلال الفني بين عاملي الإنتاج بالنسبة لإنتاج السلعتين:

$$MRTS_{KLA} = MRTS_{KLB}$$

### III ـ أمثلية باريتو في الإستهلاك والإنتاج

لتحقيق أمثلية باريتو في الإستهلاك والإنتاج فإنه يجب أن يتساوى المعدل الحدي للإحلال بين أي سلعتين وبالنسبة لأي مستهلك مع المعدل للتمويل لهاتين السلعتين وبالنسبة لأي منتج.

$$MRS = MRT$$

أي يتساوى MRS لكل مستهلك و MRT لكل منتج بالنسبة لكل زوج من السلع.

### IV ـ التوزيع الأمثل للإنتاج

حتى تتحقق أمثلية باريتو في الإنتاج يجب أن يتساوى المعدل الحدي للتمويل MRT لأي سلعتين مثل B, C, A بين كل المنتجين، ويمثل المعدل الحدي للتمويل بين السلعتين B, A الكمية المنتجة من السلعة A والمستغنى عنها من أجل إنتاج وحدة إضافية من السلعة B ويساوي باستعمال كميات ثابتة من عوامل الإنتاج:

$$K = K_A + K_B , \quad L = L_A + L_B$$

$$MRT = \frac{-dA}{dB} = \frac{MCA}{MCB} = \frac{\text{التكلفة الحدية للسلعة A}}{\text{التكلفة الحدية للسلعة B}}$$

# مراجع الباب السابع

## مراجع الباب السابع

1 ــ د، هناء خير الدين، الاقتصاد الرياضي، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، الطبعة الأولى، 1979.

2 د. حليمي. م . هندرسون. ريتشارد، أ. كوندت، ترجمة متوكل عباس مهلهل، نيويورك، دار ماكجرو هيل للنشر، 1983.

3 ــ عمر صخري، مبادئ الاقتصاد الوحدي. الجزائر. ديوان المطبوعات الجامعية، 1986.

4 – Fiori (G), Introduction élémentaire à la microéconomie, Librairie de l'université Aix en Provence 1986.

5 – Picard ( Pierre) , Eléments de microéconomie, Théorie et applications, Paris, Monchretien 1987.

# الباب الثامن

# دوال الإنتاج الخطية

**تمهيد :**

في دراستنا السابقة افترضنا خضـوع سـلوك دوال الإنتـاج التـي استخدمناها إلى القوانين الإقتصادية كقانون تناقص الغلة وقانون غلة الحجـم وإمكانية الإحلال اللانهائية بين عوامل الإنتاج ونتيجـة لـذلك كانـت دوال الإنتاج المستخدمة غير خطية، ولكن قد تكون دوال الإنتاجية خطية، ودالـة الإنتاج الخطية متكونة من مجموعة حركات إنتاجية خطية يمكن الإسـتقادة منها في آن واحد ( وتعتبر حركة الإنتاج الخطية عملية يتم من خلالها إنتاج منتج أو أكثر من المنتجات بنسب ثابتة وذلك باستخدام نسب ثابتة من عوامل الإنتاج، وحيث حركة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى فإنها تعطي حجما للغلة ثابتا ( أي لثبات غلة الحجم ).

إذا واجهت الوحدة الإنتاجية حالة تكون فيها الدوال الخاصة بالتكاليف والإيراد الكلي والإنتاج كلها خطية، فإنها مازالت تواجـه نفـس المشـاكل والأهداف كما لو كانت هذه الدوال غير خطية، حيث تبحـث عـن أفضـل الطرق التي يمكن أن تستخدم بها مواردها المحدودة لتصل لأكبر إنتـاج أو أعظم ربح أو أدنى تكاليف، ويساعد على إيجاد الحلول المثلى لهذه المشاكل إستخدام البرمجة الخطية، حيث تغطي البرمجة الخطية المسائل التي تبحـث عن الحد الأعلى أو الحد الأدنى تحت قيود في شكل معـادلات أو متباينـات والشرط الذي ينص على كون جميع قيم المتغيرات موجبة ( غير سالبة ).

في هذا الباب سنتناول ما يلي :

- البرمجة الخطية.
- الطريقة البيانية.
- طريقة السمبلكس.

# الفصل الأول
# البرمجة الخطية

## I ـ الفروض الأساسية لبرنامج خطي:

### 1 ـ القيود :

للوحدة الإنتاجية كميات محدودة من عوامل الإنتاج وموارد مالية محدودة تعتبر كلها حدود ( قيود ) على الوحدة الإنتاجية وهي تهدف إلى استخدام أفضل الطرق الإنتاجية للحصول على أكبر كمية من الإنتاج ممكنة أو أدنى تكاليف أو أقصى ربح ممكن.

### 2 ـ المنافسة الكاملة:

نفترض أن تسود سوق المنتجات وسوق عوامل الإنتاج المنافسة التامة وبالتالي ثبات الأسعار في السوقين.

3 ـ جميع العلاقات تحكمها دوال خطية.

4 ـ الحركات الإنتاجية متجانسة من الدرجة الأولى وبالتالي دالة الإنتاج تخضع لثبات غلة الحجم.

إن البرمجة الخطية أسلوب رياضي بحت يستفاد منه في إيجاد الحلول المثلى للمشاكل الإقتصادية التي تواجه الوحدة الإنتاجية، فهي تبين ما يجب أن تكون عليه الأوضاع في ظل إفتراضات وأهداف معينة ولكن لا تستطيع وصف الظواهر الإقتصادية كما هي عليه.

## II ـ مشكلة البرمجة الخطية:

تتكون مشكلة البرمجة الخطية من ثلاثة أجزاء هي دالة الهدف، القيود، شروط عدم سالبية المتغيرات، وتوصف هذه المشكلة بالخطية لأن كل من دالة الهدف والقيود خطية.

**1 ـ دالة الهدف :**

وهي الدالة التي يجب تحديد قيمتها العظمى أو الصغرى حيث تتحقـــق دالة الهدف بقيمتها العظمى لدى تعظــيم دوال معينـــة للـــربح أو للعائـــد أو الإستعمال أو للقدرات أو للوقت...إلخ وتتحقق قيمتها الصغرى بتخفيض دوال معينة للتكاليف الوقت...إلخ وترمز المتغيرات في دالة الهدف إلى الكميـــات التي يراد تحديدها لتحقيق الهدف وتسمى بالمتغيرات القرارية.

فإذا فرضنا أن Cj ترمز إلى التكاليف فإن دالة الهدف تكون

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 \ldots\ldots C_n X_n$$

أقل ما يمكن ( MIN )

وإذا فرضنا أن $f_j$ ترمز إلى الأرباح فإن دالة الهدف تكون:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} f_j X_j = f_1 X_1 + f_2 X_2 + f_3 X_3 \ldots\ldots f_n X_n$$

أكبر ما يمكن ( Max ).

**2 ـ القيود :**

وهي قيود تربط المتغيرات تدعى بالقيود الهيكلية حيث تحد من حرية الوحدة الإنتاجية كالطاقة الآلية وقيد العمل وكمية المـــواد الأوليـــة والطاقـــة التخزينية وقد تتخذ شكل معادلات أو متباينات ( متراجحات ).

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots\ldots a_{1j} X_j + \ldots\ldots\ldots a_{1n} X_n \leq b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots\ldots a_{2j} X_j + \ldots\ldots\ldots a_{2n} X_n \leq b_2$$

.........................................................................

.........................................................................

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \ldots\ldots a_{ij} X_j + \ldots\ldots\ldots a_{in} X_n \leq b_i$$

.........................................................................

.........................................................................

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots\ldots a_{mj} X_j + \ldots\ldots\ldots a_{mn} X_n \leq b_m$$

وقد يكون الطرق الأيسر أكبر أو يساوي الأيمن وربما يساويه فقط

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

**<u>3 ـ قيد ( شرط ) عدم السالبة :</u>**

وهي قيود على المتغيرات القرارية تدعى بالقيود اللاســالبة حيــث $X_j \geq 0$ بالنسبة إلى $j = 1, 2 \ldots n$

**<u>II ـ المتغيرات المتممة والإصطناعية :</u>**

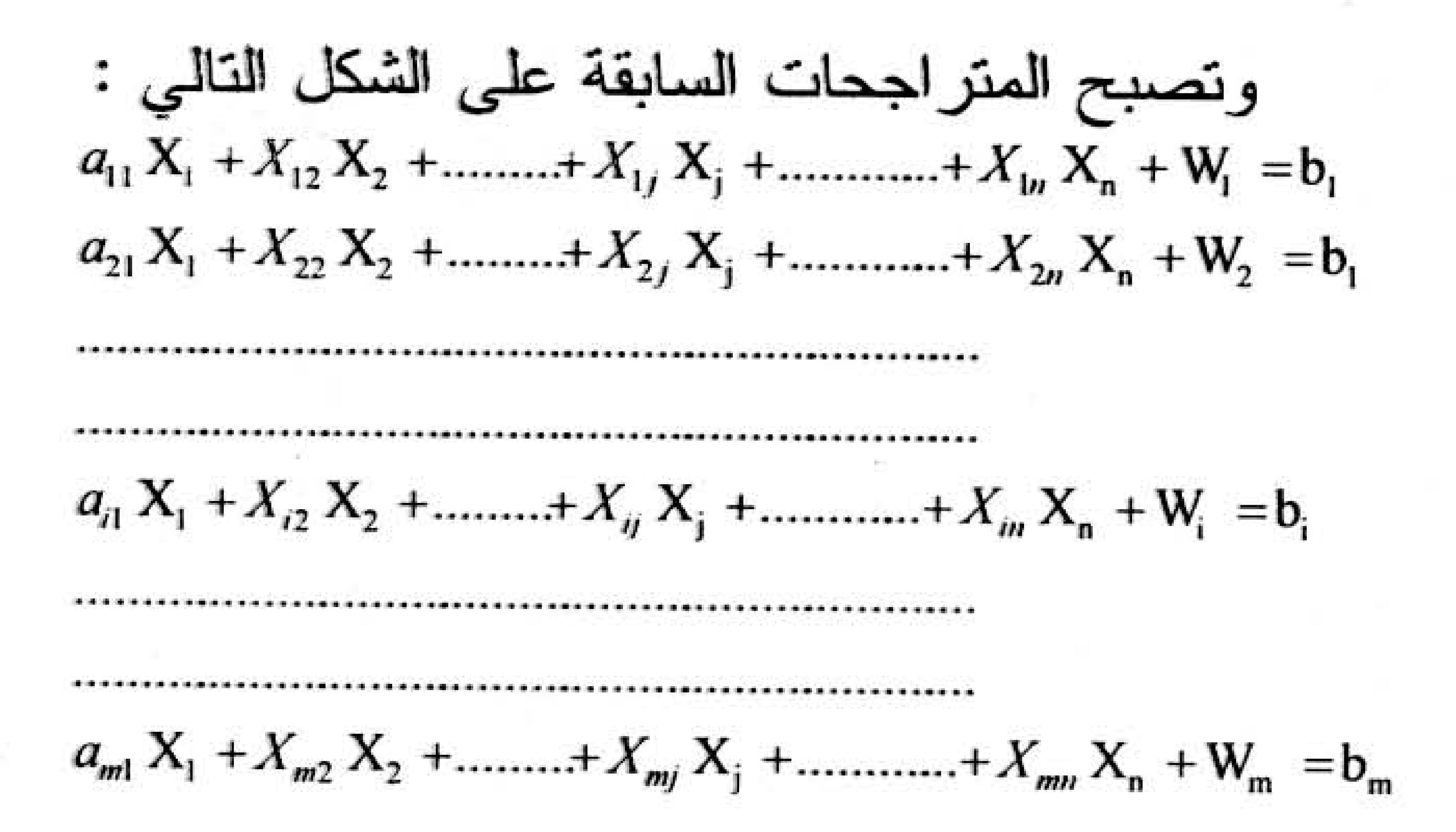
تحول مجموعة المتراجحات إلى معادلات بإضافة متغيــرات متممــة وذلك كما يلي :

فإذا كان لدينا $a \leq b$ فإن $a + s = b$

وإذا كان لدينا $a \geq b$ نضرب الطرفين في ( $-1$ ) فيصبح لدينا:

$-a \leq -b$ نضيف متغير متمم ويصبح لدينا $-a + s \leq -b$

ولكن يجدر بالإشارة أن ننبه أنه عندما تكــون $a \geq b$ يمكــن أن يضاف إلى المتغيرات المتممة أخرى اصطناعية وإذا تبين بالحــل النهــائي وجود قيمة لهذه المتغيرات الإصطناعية فإن ذلك يعنــي وجــود منتجــات إفتراضية أو وقت عطالة.



وتصبح المتراجحات السابقة على الشكل التالي :

$$a_{11} X_1 + X_{12} X_2 + \ldots\ldots + X_{1j} X_j + \ldots\ldots\ldots + X_{1n} X_n + W_1 = b_1$$

$$a_{21} X_1 + X_{22} X_2 + \ldots\ldots + X_{2j} X_j + \ldots\ldots\ldots + X_{2n} X_n + W_2 = b_1$$

..............................................................................

..............................................................................

$$a_{i1} X_1 + X_{i2} X_2 + \ldots\ldots + X_{ij} X_j + \ldots\ldots\ldots + X_{in} X_n + W_i = b_i$$

..............................................................................

..............................................................................

$$a_{m1} X_1 + X_{m2} X_2 + \ldots\ldots + X_{mj} X_j + \ldots\ldots\ldots + X_{mn} X_n + W_m = b_m$$

ونطرح هنا سؤال كيف يمكن حل مشكلة البرمجة الخطية، والإجابة على ذلك تكون في الفصلين القادمين حيث تستخدم الطريقة البيانية وطريق السمبلكس.

وتتمثل مشكلة حل هذا البرنامج الخطي في تحديد القيم المثلى لكل من المتغيرات الأصلية Xj حيث j = 1, 2 ..n والمتغيرات المتممة Wi حيث I = 1,2...m وتبين المتغيرات المتممة Wi عوامل الإنتاج المقيدة ( أي تلك التي يساوي المتغير المتمم المناظر لها صفرا ) والعوامل الفائضة وكمية الطاقة الفائضة في استخدام تلك العوامل.

## IV – صياغة النظرية الأساسية للبرمجة الخطية:

يمكن دائما إيجاد حل أمثل لأي مشكلة برمجة خطية بحيث أن العدد الكلي للمتغيرات الأصلية والمتممة الذي لا يساوي الصفر يعادل عدد القيود.

ويطلق حل أساسي على أي حل يحقق شرط تعادل عدد المتغيرات الموجبة مع عدد القيود، وهذه النظرية تعبر عن إمكان إيجاد حل أمثل عند ركن من أركان حيز الإمكان.



# الفصل الثاني
# الطريقة البيانية

## الفصل الثاني: الطريقة البيانية ( الحل البياني )

تستخدم الطريقة البيانية بسهولة في حالة متغيرين، ويصعب استخدامها لإيجاد قيم ثلاث متغيرات أما إذا تجاوز عـدد المتغيـرات الثلاثـة يتعـذر استخدامها، وفي هذه الطريقة نجيب على السؤال التالي كيف نصـور هـذه المشكلة هندسيا ؟ أي كيف يمكن تمثيل القيود هندسيا ؟ وكيف يمكن تصوير دالة الهدف ؟ ثم ما هو الحل الأمثل ؟

**مثال:**

لنفرض وحدة إنتاجية تنتج منتجين $X_1$ ,$X_2$ باستخدام عاملي إنتاج هـو L, K وذلك وفق الجدول التالي:

| عوامل الإنتاج وعدد الوحدات المتاحة منها | | عدد الوحدات اللازمة لإنتاج وحدة واحدة | |
|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_2$ |
| L | 45 | 1 | 1,5 |
| K | 60 | 2 | 1,5 |
| ربح الوحدة المنتجة | | 15 | 20 |

إذا فرضنا أن الوحدة الإنتاجية قادرة على بيع ما تنتجه فيمكننا صياغة المشكلة على النحو التالي:

المطلوب إيجاد الكميتين X1 ,X2 التي تعظم دالة الربح أي تجعلها أكبر أكبر ما يمكن تحت القيود التالية: $Z = 15\,X_1 + 20\,X_2$

تحت القيود التالية:

$$X_1 + 1{,}5\,X_2 \leq 45$$
$$2X_1 + 1{,}5\,X_2 \leq 60$$
$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

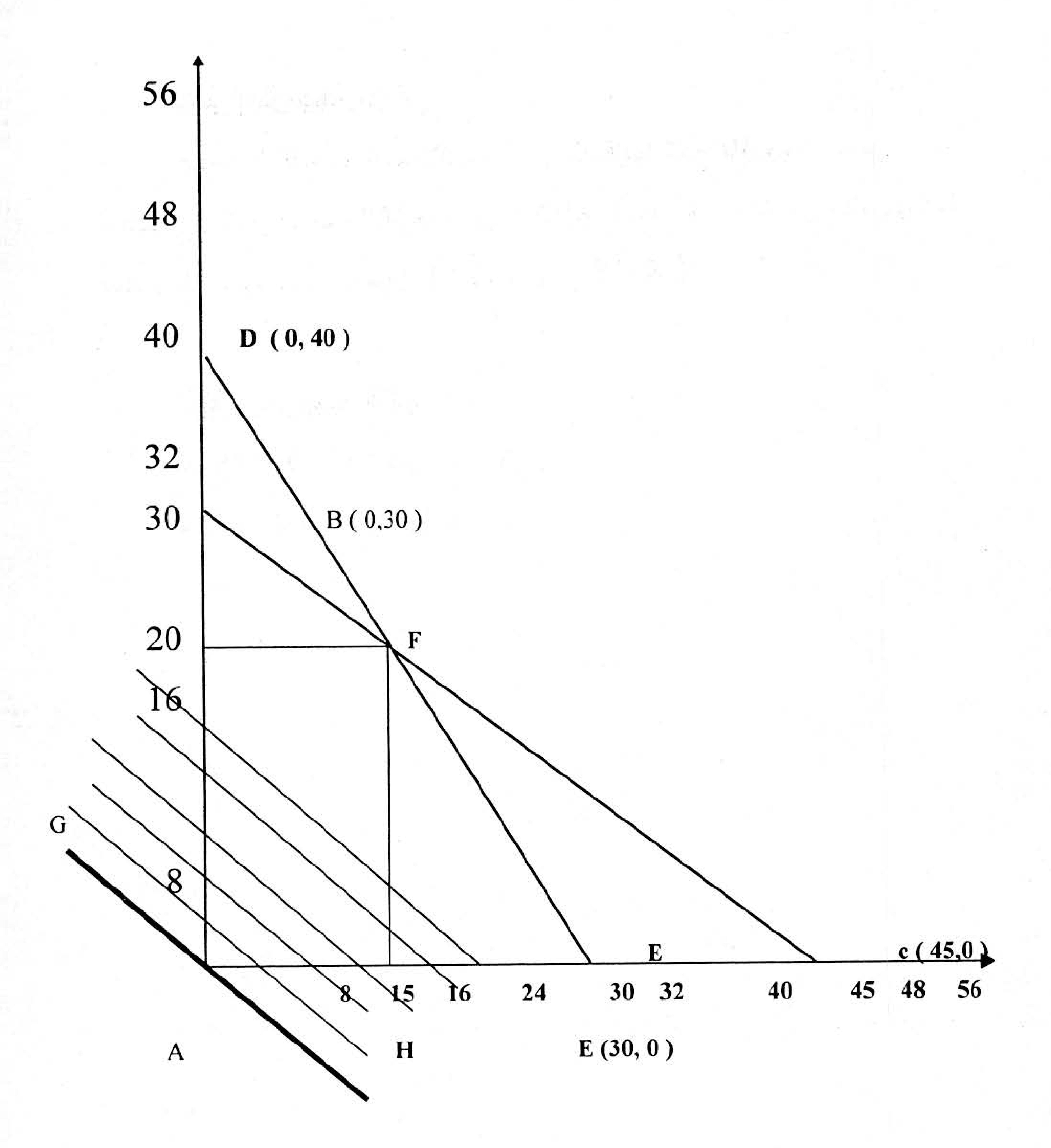
<u>نأخذ المتراجحة الأولى:</u>

عندما لا تنتج الوحدة الإنتاجية من $X_1$ فإنها تنتج 30 وحدة مـــن $X_2$ وعندما لا تنتج الوحدة الإنتاجية من $X_2$ فإنها تنتج 45 وحدة من $X_1$، ويمكننا تمثيل ذلك بتوصيل النقطتين ( 30، 0 )، ( 0، 45 ).

<u>نأخذ المتراجحة الثانية</u> :

إذا كانت $X_1 = 0$ فإن $X_2 = 40$

وإذا كانت $X_2 = 0$ فإن $X_1 = 30$



56
48
40
D ( 0, 40 )
32
30
B ( 0,30 )
20
F
16
G
8
E
c ( 45,0 )
8
15
16
24
30
32
40
45
48
56
A
H
E (30, 0 )


الشكل VIII . 1

**نأخذ الآن معادلة الربح:**

إذا لم تنتج الوحدة الإنتاجية أي وحدة من $X_1$ و $X_2$ يمكننا رسم معادلة الربح على شكل خط مستقيم يمر من نقطة الأصل ( 0، 0 ) A ويكون الربح 0 = ( 0 ) 20 + ( 0 ) 15 = Z

يمكننا أن نتصور أن المستقيم ( G H) يتحرك موازيا لنفسه إلى أن يمس المضلع AEFB عند أبعد نقطة فيه حيث نقطة التماس هذه تتميز بصفتين.

أ ـ أنها تحقق القيود الهيكلية وعدم السالبية.

ب ـ أنها تجعل من دالة الهدف أكبر ما يمكن.

والجدير بالملاحظ أن النقاط الواقعة على محيط المضلع وبداخله تحقق القيود الهيكلية وعدم السالبية، إلا أن النقطة F تحقق أكبر ما يمكن من الربح أي أن النقطة F تجعل من دالة الهدف أكبر ما يمكن.

ويمكننا بالتعويض في دالة الهدف عن إحداثيات رؤوس المضلع AEFB حتى نتأكد من أن النقطة F تكون عندها دالة الهدف أكبر ما يمكن.

دالة الهدف هي : $Z = 15\ X_1 + 20\ X_2$

عند النقطة A يكون الربح $Z = 15 ( 0 ) + 20 ( 0 ) = 0$

عند النقطة E يكون الربح $Z = 15 ( 30 ) + 20 ( 0 ) = 450$

عند النقطة F يكون الربح $Z = 15 ( 15 ) + 20 ( 20 ) = 625$

عند النقطة B يكون الربح $Z = 15 ( 0 ) + 20 ( 30 ) = 600$

نلاحظ أنه عندما تنتج الوحدة الإنتاجية 15 وحدة من $X_1$ ، 20 وحدة من $X_2$ تحقق أكبر ربح ممكن قدره 625 وحدة نقدية وهو يمثل الحل الأمثل، أما باقي النقاط الواقعة على ضلوع المضلع أو داخله فهي تمثل حلا ممكنا، ويسمى كل المضلع بحيز الإمكان.

# الفصل الثاني
# طريقة السمبلكس

## الفصل الثالث: طريقة السمبلكس

في الفصل السابق تناولنا الحل البياني وبينا أنه سهل في حالة متغيرين وصعب في حالة ثلاثة متغيرات ومتعذر إذا تجاوز عدد المتغيرات الثلاثـــة، وأسلوب السمبلكس ليس الأسلوب الوحيد في حل مشاكل البرمجـــة الخطيـــة وإنما أسهلهم، ويعتبر السمبلكس طريقة مرحلية نلخصها فيما يلي:

1 ـــ تحويل القيود الهيكلية إلى معادلات وقد بينا ذلك سابقا في الفصل الأول من هذا الباب.

2 ـــ اختيار حل أساسي مبدئي مسموح به، أي تحديد ركن من أركان حيز الإمكان، وغالبا تكون نقطة الأصل أحد أركان حيز الإمكان مما يسهل هذه الخطوة.

3 ـــ حساب الأرباح عند نقطة الأصل A والركنين المجاورين E و B.

4 ـــ إذا كانت الأرباح في أحد الركنين أو كليهما أكبر منها فـــي النقطـــة A يجب الإنتقال إلى الركن الذي يحقق أرباحا أعلى لكل وحدة منتجة وليكن B مثلا

5 ـــ تكرر المرحلتين 3، 4 ولكن بإحلال B محـــل A، ثـــم تحســـب الأرباح عند النقطة F وتقارن مع الأرباح عند النقطة B فإذا كانت أكبر يجب الإنتقال إلى النقطة F وهي تمثل في هذه الحالة الحل الأمثل، أمـــا إذا كـــان العكس فتمثل النقطة B الحل الأمثل.

إن العرض السابق مبسط جدا في حين يجد الباحث صعوبة في تحديد الأركان المجاورة للركن الذي حدده عند البدء، والملاحـــظ علـــى طريقـــة السمبلكس أنه مهما كانت الصعوبات فإن استخدام هذه الطريقة أسهل من عدم استخدامها لأنه في حالة عدم استخدام هذه الطريقة يمكن أن يلجأ المسؤول أو

الباحث إلى الطريقة العادية وهي إجراء التوافيق الممكنة لعلميات الإنتاج بغية تحديد برنامج الإنتاج الملائم في ظل قيود هيكلية تحد من تصرفه، وتـــزداد الطريقة العادية هذه تعقيدا بزيادة المنتجات وبزيادة القيود، وفيما يلي عرض للقواعد العملية المطبقة عند إتباع طريقة السمبلكس.

1 ــ تحويل القيود الهيكلية إلى معادلات بإضافة متغيرات متممة ولقد بينا ذلك سابقا.

2 ــ إعادة صياغة المشكلة وذلك بتجميع جميع الحـــدود المتضـــمنة للمتغيرات الأساسية في الطرف الأيمن

$$Z = f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots\dots f_j X_j + \dots\dots\dots f_n X_n \text{ (Max)}$$

( أكبر ما يمكن )

بشرط أن:

$$W_1 = b_1 - a_{11} X_1 - a_{12} X_2 \dots\dots\dots\dots - a_{1j} X_j \dots\dots\dots\dots - a_{1n} X_n$$
$$W_2 = b_2 - a_{21} X_1 - a_{22} X_2 \dots\dots\dots\dots - a_{2j} X_j \dots\dots\dots\dots - a_{2n} X_n$$

..................................................................................................................

..................................................................................................................

$$W_i = b_i - a_{i1} X_1 - a_{i2} X_2 - \dots\dots\dots\dots - a_{ij} X_j \dots\dots\dots\dots - a_{in} X_n$$

..................................................................................................................

..................................................................................................................

$$W_m = b_m - a_{m1} X_1 - a_{m2} X_2 \dots\dots\dots\dots - a_{mj} X_j \dots\dots\dots\dots - a_{mn} X_n$$

وأن جميع المتغيرات:

$$(i = 1,2 \dots m \;,\; j = 1,2 \dots n) \; W_i \geq 0 \;,\; x_j \geq 0$$

3 ــ إيجاد حل أساسي مبدئي مسموح به أي يكون عـــدد المتغيـــرات التي لا تساوي صفرا مساويا لعدد القيود، وغالبا يكون الحل الأساسي هـــو نقطة الأصل أي:

$Xj = 0$ حيث $J = 1, 2 \;\dots\dots\; n$ وبالتالي تكون المتغيرات:

$Xj = 0$ حيث $J = 1, 2 \; ....... \; n$ وبالتالي تكون المتغيرات:

$$Wm = bm \, , \, ....... \, , W2 = b2, \;\; W1 = b1$$

4 ــ التأكد من أن هذا الحل ممكنا، ولا يكون ممكنا إلا إذا كانت جميع الثوابت الحرة غير سالبة أي bi غير سالبة حيث $I = 1, 2 \; .... \; m$

5 ــ التحقق من أمثلة الحل، ونصل إلى الحل الأمثل عبر الإنتقال من حل أساسي إلى حل أساسي آخر، ويتم هذا الإنتقال كما يلي :

1 ) ننقل المتغيرات ذات القيم الموجبة إلى الطرف الأيسر وتسمى بالمتغيرات الأساسية وننقل المتغيرات ذات القيمة الصفرية إلى الطرف الأيمن وتسمى بالمتغيرات غير الأساسية.

أي عند الإنتقال من حل أساسي إلى حل أساسي آخر يصبح أحد المتغيرات غير الأساسية متغيرا أساسيا ويسمى المتغير الداخل، ويصبح أحد المتغيرات الأساسية متغيرا غير أساسي ليحل محل المتغير الداخل ويسمى المتغير الخارج.

**مثال:** نفرض المعادلة التالية:

$$w_2 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - .... - a_{2j}x_j - .... - a_{2n}x_n$$

ونفرض أن المتغير الداخل هو Xj والمتغير الخارج هو W2 فتصبح المعادلة الجديدة هي:

$$X_j = \frac{b_2}{a_{2j}} - \frac{W_2}{a_{2j}} - \frac{a_{21}}{a_{2j}} x_1 \;\; - \frac{a_{22}}{a_{2j}} x_2 \; ..... \frac{a_{2n}}{a_{2j}} x_n$$

حيث:

$$J = 1, .........m$$

وبالتعويض عن قيمة Xj بهذه القيمة في كل معادلة Z ومعادلة W1 نحصل على:

$$Z = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + .... + f_j x_j + .... + f_n x_n$$

بالتعويض عن xj نحصل على:

$$Z=f_0 +f_1 x_1 +f_2 x_2 +....+f_j \left[ \frac{b_2}{a_{2j}} - \frac{W_2}{a_{2j}} - \frac{a_{21}}{a_{2j}} x_1 - \frac{a_{22}}{a_{2j}} x_1 ..... - \frac{a_{2n}}{a_{2j}} x_n \right]$$
$$+ ....... + f_n x_n$$

$$Z=f_0 +f_1 x_1 +f_2 x_2 +....+f_j \frac{b_2}{a_{2j}} - f_j \frac{W_2}{a_{2j}} - f_j \frac{a_{21}}{a_{2j}} X_j + f_j \frac{a_{22}}{a_{2j}} X_2 ......$$
$$- f_j \frac{a_{2n}}{a_{2j}} X_n + ....... + f_n X_n$$

$$Z = \left[ f_0 + f_j \frac{b_2}{a_{2j}} \right] - \frac{f_j}{a_{2j}} W_2 + \left[ f_1 - f_j \frac{a_{21}}{a_{2j}} \right] x_1 +$$
$$\left[ f_2 - f_j \frac{a_{22}}{a_{2j}} x_2 \right] + ....... + \left[ f_n - f_j \frac{a_{2n}}{a_{2j}} \right] x_n$$

لدينا:

$$w_1 = b_1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - ..... - a_{1j} x_j - ..... - a_{1n} x_n$$

بالتعويض عن xj نحصل على:

$$w_1 = b_1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - ..... - a_{1j} \left[ \frac{b_2}{a_{2j}} - \frac{w_2}{a_{2j}} - \frac{a_{21}}{a_{2j}} x_1 \right.$$
$$\left. - \frac{a_{22}}{a_{2j}} x_2 .... - \frac{a_{2n}}{a_{2j}} x_n \right] .... - a_{1n} x_n$$

$$w_1 = b_1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2 - a_{1j} \frac{b_2}{a_{2j}} + a_{1j} \frac{w_2}{a_{2j}} + a_{1j} \frac{a_{21}}{a_{2j}} x_1$$
$$+ a_{1j} \frac{a_{22}}{a_{2j}} x_2 ..... + a_{1j} \frac{a_{2n}}{a_{2j}} x_n ..... - a_{1n} x_n$$

$$W_1=\left[b_1 - a_{1j}\ -\frac{b_2}{a_{2j}}\right]+a_{ij}\ -\frac{W_2}{a_{2j}}+\left[-a_{11}+a_{ij}\frac{a_{21}}{a_{2j}}\right]x_j$$

$$+\left[-a_{12}+a_{1J}\frac{a_{22}}{a_{2j}}\right]x_2+.........+\left[-a_{1n}+a_{1j}\frac{a_{2n}}{a_{2j}}\right]x_n$$

يسمى $X_j$ بالمتغير الداخل ويسمى $W_2$ بالمتغير الخارج.

**ب) ـ كيفية اختيار المتغير الداخل :**

إذا كان المطلوب هو إيجاد أكبر قيمة ممكنة لدالة الهدف وكانت جميع معاملات المتغيرات غير الأساسية فيها موجبة فإننا نختار المتغير ذا أكبر معامل موجب.

أما إذا كان المطلوب هو إيجاد أصغر قيمة لها وكانت جميع معاملات المتغيرات غير الأساسية فيها سالبة فإننا نختار المتغير ذا أكبر معامل سالب.

إذن نختار المتغير غير الأساسي الذي يؤدي إلى تحسين دالة الهدف نحو الحد الأفضل ويسمى العمود الذي يحتوي على المتغير الداخل بعمود الإرتكاز ( العمود المحوري ) ويسمى الصف الذي يحتوي على المتغير الخارج بصف الإرتكاز ( الصف المحوري ) ويسمى العنصر الذي يقع في تقاطع عمود الإرتكاز وصف الإرتكاز بعنصر الإرتكاز (العنصر المحوري).

ج ـ **كيفية اختيار المتغير الخارج** :

قبل إختيار المتغير الخارج يجب اختيار عنصر الإرتكاز، ومنه يـتم تعيين صف الإرتكاز ثم المتغير الخارج، حيث يقع في صف الإرتكاز. إذن لاختيار المتغير الخارج نقوم بما يلي :

أ ـ نختار المتغير الداخل وفق القاعدة السابقة.

ب ـ المتغير الداخل يقع في عمود الإرتكاز وبالتالي نكون قد عينـا عمود الإرتكاز.

ج ـ نقسم عناصر عمود الثوابت الحرة على العناصر المناظرة فـي عمود الإرتكاز.

في المشكلة السابقة مثلا نحسب:

$$\frac{b_m}{a_{mj}} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{b_3}{a_{3j}},\ \frac{b_2}{a_{2j}},\ \frac{b_1}{a_{1j}}$$

إن عنصر الإرتكاز الذي يجب إختياره هو ذلك العنصر الذي ينـاظر أصغر قيمة مطلقة لخارج القسمة. وحيث عنصر الإرتكاز يقع فـي صـف الإرتكاز كذلك إذن يمكننا تحديد المتغير الخارج وعلى أية حال فإن المتغير الخارج هو ذلك المتغير الذي يظل عند اختياره الحل مسموحا به، فإذا جمعنا المعلومات من المشكلة السابقة في الجدول التالي نلاحظ كيفية كتابـة هـذه المعلومات في هذا الجدول.

| المتغيرات الأساسية | عمود الثوابت الحرة | المتغيرات غير الأساسية | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | | | $X_j$ | العمود المركزي | | | $X_n$ |
| $Z$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | | | $f_j$ | | | | $f_n$ |
| $W_1$ | $b_1$ | $-a_{11}$ | $-a_{12}$ | $-a_{13}$ | | | $-a_{1j}$ | | | | $-a_{1n}$ |
| الصف W2 المركزي | $b_2$ | $-a_{21}$ | $-a_{22}$ | $-a_{23}$ | | | $-a_{2j}$ | عنصر الارتكاز | | | $-a_{2n}$ |
| | | | | | | | | | | | |
| $W_i$ | $b_i$ | $-a_{i1}$ | $-a_{i2}$ | $-a_{i3}$ | | | $-a_{ij}$ | | | | $-a_{in}$ |
| | | | | | | | | | | | |
| $W_m$ | $b_m$ | $-a_{m1}$ | $-a_{m2}$ | $-a_{m3}$ | | | $-a_{mj}$ | | | | $-a_{mn}$ |

وبعد اختيار عمود الإرتكاز وصف الإرتكاز وعنصر الإرتكاز وبالتالي المتغير الداخل والخارج ( في مثالنا السابق $X_j$ هو المتغير الداخل، $W_2$ هو المتغير الخارج ) وبعد إجراء التحويلات اللازمة للإنتقال من حل أساسي مسموح به يصبح الجدول كما يلي:

| المتغيرات الأساسية | الثوابت الحرة | المتغيرات غير الأساسية | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $X_1$ | $X_2$ | $W_2$ | $X_n$ |
| $Z$ | $f_0 + f_j \frac{b_2}{b_{2j}}$ | $f_1 - f_j \frac{a_{21}}{a_{2j}}$ | $f_2 - f_j \frac{a_{22}}{a_{2j}}$ | $-\frac{f_j}{a_{2j}}$ | $f_n - f_j \frac{a_{2n}}{a_{2j}}$ |
| $W_1$ | $b_1 - \frac{a_{1j}\, b_2}{a_{2j}}$ | $-a_{11} + \frac{a_{1j}\, a_{21}}{a_{2j}}$ | $-a_{12} + \frac{a_{1j}\, a_{22}}{a_{2j}}$ | $\frac{a_{1J}}{a_{2j}}$ | $-a_{1n} + \frac{a_{1j}\, a_{2n}}{a_{2j}}$ |
| $X_j$ | $\frac{b_2}{a_{2j}}$ | $-\frac{a_{21}}{a_{2j}}$ | $-\frac{a_{22}}{a_{2j}}$ | $-\frac{1}{a_{2j}}$ | $-\frac{a_{2n}}{a_{2j}}$ |
| $W_3$ | | | | $\frac{a_{3J}}{a_{2j}}$ | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| $W_m$ | | | | | |

تلخيص نتائج الجدول السابق:

ـ العنصر الذي يحصل محل عنصر الإرتكاز هو مقلوبه أي $-\frac{1}{a_{2j}}$

ـ باقي عناصر عمود الإرتكاز الأخرى في المصفوفة الجديدة هي حاصل قسمة كل عنصر من عمود الإرتكاز في المصفوفة القديمة على عنصر الإرتكاز في المصفوفة القديمة.

ـ نحصل على باقي عناصر صف الإرتكاز في المصفوفة الجديدة بتبديل إشارات جميع العناصر القديمة وقسمتها على عنصر الإرتكاز القديم.

ـ نحصل على جميع العناصر الأخرى بالقاعدة التالية :

العنصر الجديد = العنصر القديم − (حاصل ضرب عنصري الإرتكاز) / (عنصر الإرتكاز)

**مثال** : في العمود الأول الصف الثاني

$$-a_{11}-\frac{(-a_{1j})(-a_{21})}{(-a_{2j})}=-a_{11}+\frac{a_{1j}.a_{21}}{a_{2j}}$$

6 ـ في مثالنا السابق حيث المطلوب منا إيجاد أكبر قيمة ممكنة لدالة الهدف فإنه يمكننا الإستمرار في التبديلات إلى أن نصل إلى مرحلة تكون فيها جميع معاملات المتغيرات في دالة الهدف إما سالبة أو صفرا، وعندها نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل :

**مثال :**

أوجد أكبر قيمة ممكنة لدالة الهدف

$$Z = 2.5\,X_1 + 2\,X_2$$
$$X_1 + 2\,X_2 \leq 8000$$
$$3X_1 + 2\,X_2 \leq 9000$$

بشرط أن:

$$X_1 \geq 0 \qquad X_2 \geq 0$$

أولا : نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات متممة ولتكن $W_2, W_1$ ونعيد صياغة المشكلة كما يلي:

أوجد أكبر قيمة ممكنة لدالة الهدف: $Z = 0 + 2,5\ X_1 + 2X_2$

بشرط:

$$W_1 = 8000 - X_1 + 2X_2$$
$$W_2 = 9000 - 3X_1 - 2X_2$$
$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, W_1 \geq 0, W_2 \geq 0$$

نكتب المعاملات في جدول:

| المتغيرات الأساسية | عمود الثوابت الحرة $b_i$ | المتغيرات غير الأساسية | |
|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ |
| Z | 0 | 2,5 | 2 |
| $W_1$ | 8000 | 1 - | 2 - |
| $W_2$ | 9000 | 3 - | 2 - |

صف الارتكاز ($W_2$)

عنصر الإرتكاز (3 -)

**ثانيا**: إيجاد حل أساسي مبدئي مسموح به وعادة يكون نقطة الأصل

حيث: $X_2 = 0, \; X_1 = 0$

وبالتالي : $Z = 0$ ، $W_1 = 8000$ ، $W_2 = 9000$

إن هذا الحل ممكن ولكنه غير أمثل لأن المعادلات في دالة الهدف موجبة وبالتالي ننتقل إلى حل أساسي آخر مسموح به :

**ثالثا** : نحدد عمود الإرتكاز، فإذا نظرنا إلى المعاملات في دالة الهدف نجد معامل $x_1$هو 2,5 أكبر من معامل $x_2$ وهو 2 وبالتالي العمود الذي فيه $x_1$ هو عمود الإرتكاز.

**رابعا**: نحدد عنصر الإرتكاز، حيث نقوم بقسمة عناصر عمود الثوابت الحرة على نظائرها في عمود الإرتكاز، فنجد أصغر قيمة مطلقة لحاصل القسمة هي المقابلة إلى المتغير $W_2$ وبالتالي فإن صف الإرتكاز هو الصف الذي يحتوى على المتغير $W_2$ وعنصر الإرتكاز هو ( − 3 ).

**خامسا**: نحدد عناصر عمود الإرتكاز الباقية وفق الطريقة المبينة سابقا.

**سادسا**: نحدد عناصر صف الإرتكاز الباقية حيث لدينا:

$$W_2 = 9000 - 3X_1 - 2X_2$$

$$X_1 = 3000 - \frac{1}{3}W_2 - \frac{2}{3}X_2$$

وبالتالي عناصر الإرتكاز هي 3000 ، $-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}$ من بينها عنصر الإرتكاز في المصفوفة الجديدة يساوي مقلوب عنصر الإرتكاز في المصفوفة القديمة أي: $(-\frac{1}{3})$

**سابعا:** نحدد باقي عناصر المصفوفة الجديدة وفق الطريقة المبينة سابقا، فمثلا معامل $x_2$ في Z بالمصفوفة الجديدة.

العنصر الجديد = $2- \frac{(-2)(2,5)}{-3} = 2- \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

ثم نتمم الجدول:

| المتغيرات غير الأساسية | | عمود الثوابت الحرة | المتغيرات الأساسية |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | $W_2$ | | |
| 1/3 | -5/6 | 7500 | Z |
| - 4/3 | 1/3 | 5000 | $W_1$ |
| - 2/3 | -1/3 | 3000 | $X_1$ |

ومن الجدول نجد أن الحل الأساسي الجديد:

$Z = 7500$ , $W_1 = 5000$ , $X_1 = 3000$, $X_2 = 0$ , $W_2 = 0$

إن هذا الحل ممكن ولكن غير أمثل وبالتالي ننتقل إلى حل أساسي آخر مسموح به بنفس الطريقة المعمول بها سابقا حيث نجد عنصر الإرتكاز هو 4/3 – والمتغير الداخل هو $x_2$ والمتغير الخارج هو $w_1$ وبعد التبديلات نحصل على جدول جديد هو.

| المتغيرات غير الأساسية | | عمود الثوابت الحرة | المتغيرات الأساسية |
|---|---|---|---|
| $w_1$ | $w_2$ | | |
| -1/4 | -3/4 | 8750 | Z |
| -3/4 | 1/4 | 3750 | $X_2$ |
| ½ | -1/2 | 500 | $X_1$ |

بما أن جميع معاملات دالة الهدف سالبة ممـــا يشـــير إلـــى أن قيمـــة للمتغيرين $w_1$ ، $w_2$ تختلف عن الصفر تخفض من دالة الهدف ومن الجدول نجد الحل الأساسي. هو عبارة عن الحل الأمثل.

$$z = 8750 \text{ ، } x_2 = 3750 \text{ ، } x_1 = 500 \text{ ، } w_2 = w_1 = 0$$

وعلى الطالب إذا أراد مزيدا من الدراسة للبرمجة الخطية الرجوع إلى كتب البرمجة الخطية.

# مراجع الباب الثامن

**المراجع باللغة العربية:**

1 ــ د. محمد الناشر، المدخل إلى إدارة الأعمال، حلب، منشورات جامعة حلب، 1979، 1980.

2 ــ د. جيمي م هندرسون ريتشارد، أ. كوندت، ترجمة متوكل عباس مهلهل. نيويورك. دار ماكجروهيل للنشر 1983.

3 ــ د. علي السلمي، أساليب بحوث العمليات البرامج الخطية في التطبيق الإداري، المنظمة العربية للعلوم الإدارية. العدد 192.

# مراجع الجزء الأول

**أولا: المراجع باللغة العربية:.**

1 ـــ د. عبد العزيز هيكل، أسئلة وأجوبة في الاقتصاد التحليلي والاقتصاد الرياضي والقياسي ومبادئ الإحصاء والرياضة البحتة، بيروت . مكتبة مكاوي، 1975.

2 ـــ محمد علي الليثي، التحليل الاقتصادي، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، 1975.

3 ـــ محمد إبراهيم العزلان، مبادئ الاقتصاد، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، 1975.

4 ـــ إسماعيل هاشم محمد هاشم، مبادئ الاقتصاد التحليلي، بيروت، دار النهضة العربية 1978.

5 ـــ د. هناء خير الدين، الاقتصاد الرياضي، الإسكندرية، دار الجامعات المصرية، الطبعة الأولى 1979.

6 ـــ د. محمد الناشر، المدخل إلى إدارة الأعمال، حلب منشورات جامعة حلب 1979.

7 ـــ عباس مهلهل، د. جيمي م هندرسون ريتشارد، أ. كوندت، ترجمة متوكل عباس مهلهل. نيويورك. دار ماكجوهيل للنشر 1983.

8 ـــ د. عمر صخري، مبادئ الاقتصاد الرياضي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية، 1985.

9 ـــ محمود يونس محمد، عبد النعيم محمد مبارك، أساسيات علم الاقتصاد، بيروت، الدار الجامعية، 1985.

10 ـــ أحمد جامع، النظرية الاقتصادية، الجزء الأول، التحليل الاقتصادي الجزئي، القاهرة، دار النهضة العربية، الطبعة الخامسة، 1986.

11 ـــ عمر صخري، مبادئ الاقتصاد الوحدي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1986.

12 ـــ د. نعمت الله نجيب إبراهيم، أسس علم الاقتصاد، الاسكندرية، مؤسسة شباب الجامعة 1987.

13 ـــ لورانس ركلاين، اقتصاديات العرض والطلب، القاهرة، مكتبة الأنجلو المصرية، 1988.

14 ـــ ضياء مجيد الموسوي، النظرية الاقتصادية، التحليل الجزئي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

15 ـــ بيار غريز قار، الحساب التفاضلي والمعادلات التفاضلية، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

16 ـــ علي الخطيب، مبادئ التحليل الرياضي، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

17 ـــ شمعون شمعون، الرياضيات الاقتصادية، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1990.

18 ـــ هوارد أنتون، الجبر الخطي المبسط، الجزائر، ديوان المطبوعات الجامعية 1982.

## ثانيا: المراجع باللغة الفرنسية

1 – Amani ( Mokhtar), Microéconomie, théories critiques et exercices pratiques. Quebec caetan Morin 1981.

2 – Cedras (Jacques), Analyses microéconomie, Paris, Dalloz 1981

3 – Ferguson (C.E), Théorie microéconomiques, Paris, Economica 1982.

4 – Guerre (Bernard), Micro économie et calcul économique. Paris, Economica 1982.

5 – Lesourne ( Jacques), Analyses microéconomiques, Paris, ESI 1985.

6 – Abraham Frois (Gilber), Microéconomie, Paris Economica 1986.

7 – Bernier (B), Microéconomie, Exercices et corrigés, Paris Dunod 1986.

8 – Fiori (G), Introduction élémentaire à la macroéconomie. Librairie de l'université. Aisc en Provence 1986.

9 – Picard (Pierre), eléments de microéconomie, Théorie et applications, Paris montchrestien 1987.

# محتوى الكتاب

أنجز طبعه على مطابع

ديوان المطبوعات الجامعية

الساحة المركزية - بن عكنون

الجزائر